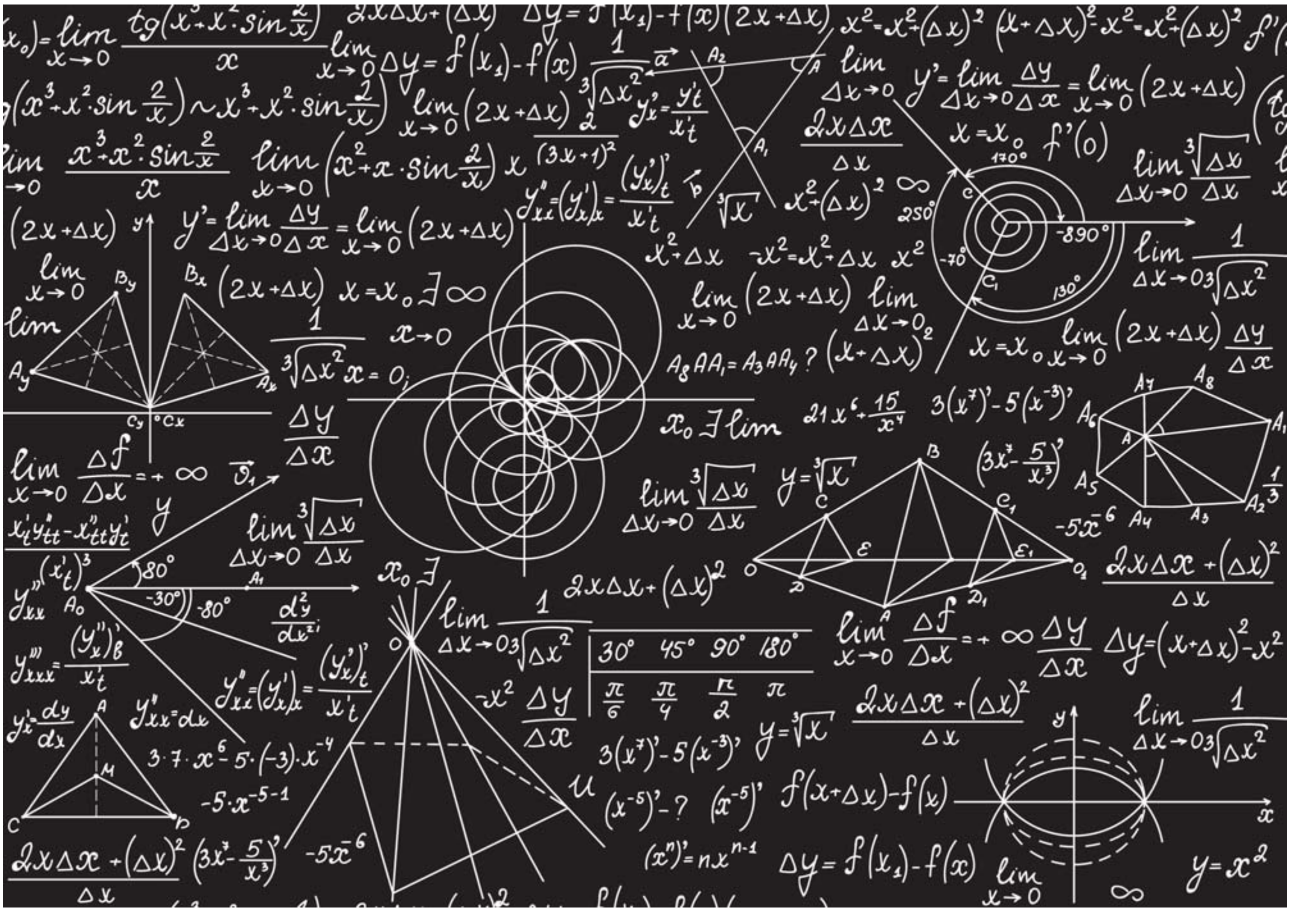
Mathematik

Ausgewählte Themen der Mathematik für Betriebswirte.



Zusammengestellt durch:

Thomas Schmitt
Prof. für Betriebsökonomie
Fachhochschule Nordwestschweiz
Promenade 26
5200 Brugg

Version 1.03, Oktober 2018

Inhaltsverzeichnis

Teil I Zahlensysteme

1. Einführung

Bekanntlich rechnen wir üblicherweise mit Zahlen, die mit Ziffern aus einem Vorrat von 10 verschiedenen Zeichen beschrieben werden: {0, 1, 2, ... , 8, 9}, wobei die Ziffer 0 ganz wesentlich für ein Stellenwertsystem bzw. das schriftliche rechnen ist1.

370291 gleich 237109?

Zweimal sind die 6 gleichen Ziffern aufgeschrieben, jedoch in unterschiedlicher Reihenfolge, d.h. eine einzelne Ziffer steht möglicherweise an einer unterschiedlichen Stelle der Reihenfolge, womit wir im Stellenwertsystem mit unseren 10 Ziffern dieser Ziffer einen unterschiedlichen Wert zuweisen.

Hundert-tausender	Zehn-tausender	Tausender	Hunderter	Zehner	Einer
$1 \bullet 10^5$	$1 \bullet 10^4$	$1 \bullet 10^3$	$1 \bullet 10^2$	$1 \bullet 10^1$	$1 \bullet 10^0$
3	**7**	**0**	**2**	**9**	**1**

Der Exponent gibt an, mit wie vielen Zehnen die Ziffer multipliziert werden muss, um ihren Wert im Dezimalsystem[2] zu bestimmen.

Man rechnet also

3 ●100’000 + 7 ● 10’000 + 0 ●1’000 + 2 ● 100 + 9 ● 10 + 1 ● 1

und spricht „Dreihundertsiebzigtausendzweihunderteinundneunzig“

Sprachlich fassen wir jeweils 3 Stellen als Block zusammen und vertauschen die Reihenfolge der Einer und Zehnerstelle.

In Berlin sagt man zu einem halben Groschen: ‘Sechser’, und das sind bekanntlich 5 Pfennige. Ein Groschen war früher, z.B. in Preussen, 12 Pfennige wert und die Vielfachen der Zahl 3 oder 6 haben sich, zumeist religiöser Ursachen wegen, in vielen Kulturen ‘rechentechnisch durchgesetzt’ (Uhrzeiten, Winkelmasse, etc. die auf das Zahlensystem der Babylonier zurückgehen, das auf der 6 basierte).

Es kann somit auch ein Zahlsystem mit der Basiszahl 6 definiert werden und in diesem System muss es demzufolge 6 verschiedene Ziffern geben, nämlich 0, 1, 2, 3, 4, 5. Zur Unterscheidung schreibt man jeweils die Basiszahl dazu:

2503_6

Welchen Wert hätte denn diese Zahl im vertrauten Dezimalsystem?

Zweihunder-sechzehner	Sechsund-dreissiger	Sechser	Einer
$1 \bullet 6^3$	$1 \bullet 6^2$	$1 \bullet 6^1$	$1 \bullet 6^0$
2	**5**	**0**	**3**

Die Zahl 2503_6 entspricht wertmässig: $2 \bullet 216 + 5 \bullet 36 + 0 \bullet 6 + 3 \bullet 1 = 615_{10}$

1 Erst in der Zeitspanne von Gerbert von Aurillac, dem späteren Papst Silvester II, (~ 945 - 12.05.1003), bis zu Leonardo von Pisa (~ 1170/80 bis ~ 1240) hat man in Mitteleuropa die Null und deren Bedeutung für das schriftliche Rechnen erkannt und gelernt.

2 DEZem = zehn (lateinisch

2. Verschiedene Zahlensysteme

2.1. Binärsystem

Statt wie im Zehnersystem, wo man Zahlen aus Einer, Zehner, Hunderter, Tausender, usw. bildet, werden die Zahlen im Binärsystem (Zweiersystem) aus den Potenzzahlen von 2, also 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, usw. gebildet. Im Binärsystem (auch Dualsystem genannt) gibt es nur zwei Ziffern: {0,1}. Mit diesem System arbeiten Computer, Taschenrechner, etc., weil elektrische Geräte nur Strom ein (1) und Strom aus (0) kennen. Die Zahl 7 zum Beispiel wird wie folgt geschrieben:

Sechzehner	Achter	Vierer	Zweier	Einer
$1 \bullet 2^4$	$1 \bullet 2^3$	$1 \bullet 2^2$	$1 \bullet 2^1$	$1 \bullet 2^0$
		1	**1**	**1**

Die Zahl 111_2 entspricht wertmässig: $1 \bullet 4 + 1 \bullet 2 + 1 \bullet 1 = 7_{10}$

Sollte man die Zahl 5 darstellen wollen, benötigt man nur die 4 und die 1. Die 2 wird nicht benötigt. Dies muss aber trotzdem unbedingt angegeben werden. Die 5 schreibt man folglich: 101_2.

Aufgabe 1: Von BIN nach DEZ

Wandeln Sie folgende Binärzahl in eine Dezimalzahl um:

BIN 1010 0111 = DEZ ....

Aufgabe 2: Von DEZ nach BIN

Wandeln Sie folgende Dezimalzahl in eine Binärzahl um:

DEZ 1 993 = BIN ....

Aufgabe 3: Binärzahl zu Dezimalzahl

Wandeln Sie folgende Binärzahl in eine Dezimalzahl um:

BIN 111 1100 1110 = DEZ ....

Aufgabe 4: Dezimalzahl zu Binärzahl

Wandeln Sie folgende Dezimalzahl in eine Binärzahl um:

DEZ 999 = BIN ....

2.2. Hexadezimalsystem

Das Hexadezimalsystem wird primär in der Informatik benutzt. Da die Darstellung von Inhalten mit dem Dualsystem sehr lange Zahlenreihen ergibt, kürzt man diese mit dem Hexadezimal-System wesentlich ab. Wollte man z.B. bei der Darstellung von Farben (über 16 Millionen Farben oder auch 24-Bit Farbtiefe genannt) eine Farbe beschreiben müsste eine Reihe von 24 Nullen und Einsen herangezogen werden, während beim Hexadezimalsystem sechs Zeichen dafür genügen.

Am Beispiel der Farbe Weiss soll dies gezeigt werden. Als Hexadezimal-Zahl wird diese Farbe mit FFFFFF als Dualzahl mit 1111 1111 1111 1111 1111 1111 ausgegeben. Im Dezimal-System ist das übrigens die Zahl 16‘777‘215.

Da das Hexadezimalsystem 16 unterscheidbare Ziffern benötigt werden zusätzlich die Ziffern A bis F eingesetzt.

Somit entsteht folgende Beziehung zwischen dem Dezimal und dem Hexadezimalsystem:

DEZ	HEX
0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7

DEZ	HEX
8	8
9	9
10	A
11	B
12	C
13	D
14	E
15	F

Aufgabe 5: Von HEX nach DEZ

Wandeln Sie folgende Hexadezimalzahl in eine Dezimalzahl um:

HEX 7D1 = DEZ..

Aufgabe 6: Von DEZ nach HEX

Wandeln Sie folgende Dezimalzahl in eine Hexadezimalzahl um:

DEZ 2 730 = HEX..

3. Umrechnung zwischen Zahlensystemen

3.1. Umrechnungstabelle

DEZ	BIN	HEX
0	0	0
1	1	1
2	***10***	2
3	11	3
4	***100***	4
5	101	5
6	110	6
7	111	7
8	***1000***	8
9	1001	9
10	1010	A
11	1011	B
12	1100	C
13	1101	D
14	1110	E
15	1111	F
16	***10000***	***10***
17	10001	11
18	10010	12
19	10011	13
20	10100	14
21	10101	15
22	10110	16
23	10111	17
24	11000	18
25	11001	19
26	11010	1A
27	11011	1B
28	11100	1C
29	11101	1D
30	11110	1E
31	11111	1F
32	***100000***	20
33	100001	21
34	100010	22
35	100011	23

DEZ	BIN	HEX
36	100100	24
37	100101	25
38	100110	26
39	100111	27
40	101000	28
41	101001	29
42	101010	2A
43	101011	2B
44	101100	2C
45	101101	2D
46	101110	2E
47	101111	2F
48	110000	30
49	110001	31
50	110010	32
51	110011	33
52	110100	34
53	110101	35
54	110110	36
55	110111	37
56	111000	38
57	111001	39
58	111010	3A
59	111011	3B
60	111100	3C
61	111101	3D
62	111110	3E
63	111111	3F
64	***1000000***	40
65	1000001	41
66	1000010	42
67	1000011	43
68	1000100	44
69	1000101	45
70	1000110	46
71	1000111	47

3.2. Hilfstabelle für Umrechnungen

DEZ:	1	Einer	10^0	1
	1	Zehner	10^1	10
	1	Hunderter	10^2	100
	1	Tausender	10^3	1000
BIN:	1	Einer	2^0	1
	1	Zweier	2^1	2
	1	Vierer	2^2	4
	1	Achter	2^3	8
HEX:	1	Einer	16^0	1
	1	Sechzehner	16^1	16
	1	Zweihundertsechsundfünfziger	16^2	256
	1	Viertausendsechsundneunziger	16^3	4096

3.3. Additionen und Subtraktionen im Binärsystem

Aufgabe 7: Addition Binärzahlen

Addieren Sie folgende beiden Binärzahlen:

BIN 110 0101 + 10 0111 = BIN ....

Aufgabe 8: Binäre Addition

Addieren Sie folgende Binärzahlen:

BIN 1011 1111 + BIN 110 1010 = BIN ....

Aufgabe 9: Subtraktion von Binärzahlen

Subtrahieren Sie folgende beiden Binärzahlen:

BIN 1101 1101 - 1101 0110 = BIN ....

4. Übungsaufgaben zu Zahlensystemen

4.1. Umwandlungen

Aufgabe 10: DEZ -> BIN		
DEZ 233	=	....
DEZ 10 233	=	....
DEZ 8 759	=	....
DEZ 256	=	....

Aufgabe 11: BIN -> DEZ		
BIN 111 0100	=	....
BIN 100 0011	=	....
BIN 1 0101 0101	=	....
BIN 1 0111	=	....

Aufgabe 12: DEZ -> HEX		
DEZ 100	=	....
DEZ 2 378	=	....
DEZ 33 479	=	....
DEZ 11	=	....

Aufgabe 13: HEX -> DEZ		
HEX 7D1	=	....
HEX 8235	=	....
HEX 1F4	=	....
HEX 1 D6EE	=	....

Aufgabe 14: BIN -> HEX		
BIN 1010 1010 1010	=	....
BIN 11 0010	=	....
BIN 1111 0011	=	....
BIN 1 0001	=	....

Aufgabe 15: HEX -> BIN		
HEX 1F	=	....
HEX 40	=	....
HEX 9	=	....
HEX BAD	=	....

4.2. Rechenoperationen

Aufgabe 16: Binäre Rechenoperationen

BIN 1 0111 0110 + BIN 1000 0101 = ...
BIN 1100 0101 1001 + BIN 1 1111 = ...

BIN 11 0010 1011 - BIN 1001 1101 = ...
BIN 10 0100 1111 1101 - BIN 110 1101 1110 = ...

BIN 1001 0101 * BIN 101 = ...
BIN 1 0110 * BIN 1100 = ...

BIN 1101 0101 / BIN 11 = ...
BIN 11 1001 1011 / BIN 1101 = ...

Aufgabe 17: Hexadezimale Rechenoperationen

HEX 5F4A + HEX 17D = ...
HEX 7FF 17CD + HEX ABCD = ...

HEX A61 2949 - HEX 3 481F = ...
HEX 58 9182 - HEX 3 27DA = ...

HEX 7 625A * HEX 1D = ...
HEX 820 AF19 * HEX F = ...

HEX 4 BF0F / HEX 45 = ...
HEX AE 3186 / HEX 11 = ...

Teil II Mengenlehre

1. Grundlagen

1.1. Die Menge

Eine Menge ist eine Zusammenfassung von Objekten.	Definition

Die Objekte bezeichnet man als **Elemente** der Menge. Gehört ein Objekt x zur Menge M, so schreibt man $x \in M$ und liest “x ist Element von M“. Gehört ein Objekt y nicht zur Menge M, so schreibt man $y \notin M$ und liest “y ist nicht Element von M“.

1.2. Darstellungsformen von Mengen

1.2.1. Aufzählende Form

Um eine Menge M zu beschreiben bzw. zu definieren, können wir schreiben

$M := \{ ... \}$

das heisst, wir zählen in der Klammer alle ihre Elemente, durch Komma getrennt, auf (Aufzählende Form der Darstellung).

Endliche Mengen

U sei die Menge aller Selbstlaute. U := {a, e, i, o, u , ä, ö, ü} V sei die Menge aller geraden Zahlen zwischen 1 und 20. V := {2, 4, 6, ..., 20}	Beispiele

Unendliche Mengen

W sei die Menge aller geraden, positiven Zahlen. W := {2, 4, 6, 8, ...}	Beispiel

1.2.2. Beschreibende Form

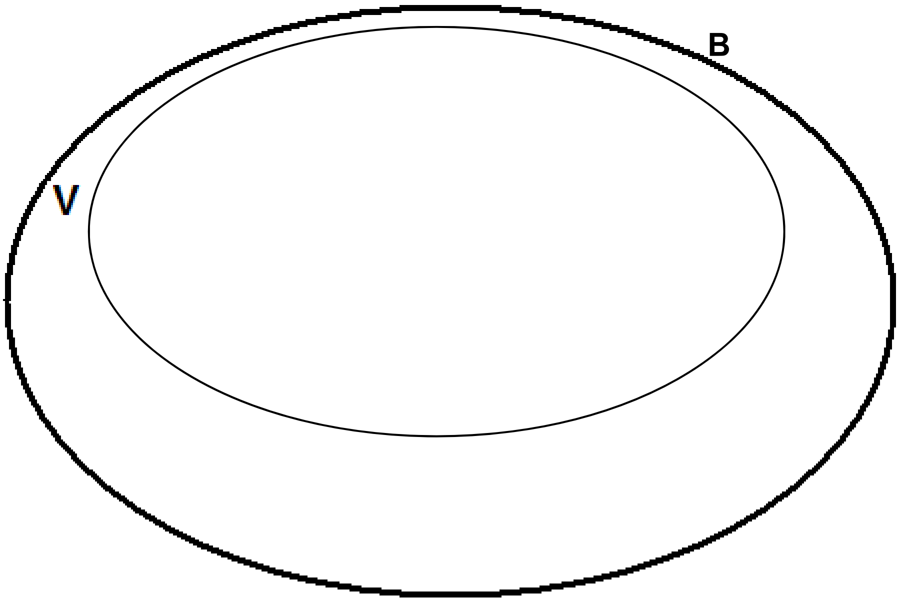
Eine zweite Möglichkeit der Darstellung besteht darin, diese Menge durch eine bestimmte, allen Elementen gemeinsame Eigenschaft zu definieren, welche durch eine Aussageform angegeben wird (Beschreibende Form der Darstellung).

V sei die Menge aller Selbstlaute. $V := \{ x \mid x \text{ ist ein Selbstlaut}\}$ Lies “V ist die Menge aller x, für die gilt: x ist ein Selbstlaut“.	Beispiel

1.2.3. Grafische Form

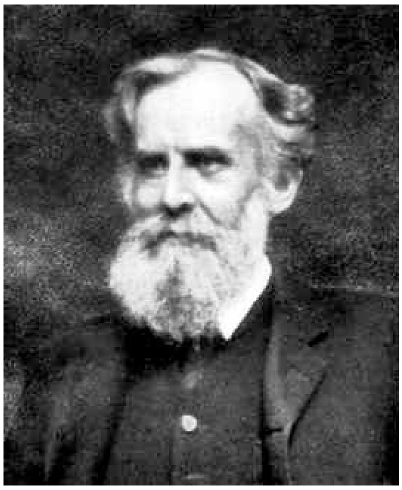
Eine dritte Möglichkeit der Darstellung besteht darin, diese Menge graphisch, als Mengen-, Euler- bzw. Venn-Diagramm, darzustellen (Grafische Form der Darstellung).

V sei die Menge aller Selbstlaute.

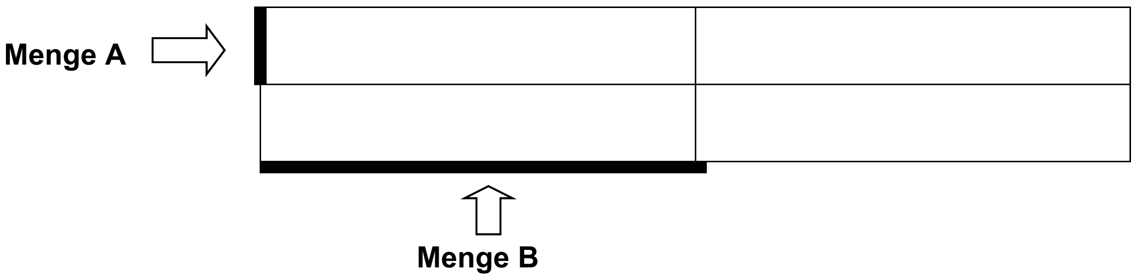


Beispiel

Das Venn-Diagramm wurde vom englischen Mathematiker und Philosophen John Venn [Bild rechts] (1834 bis 1923) entwickelt. John Venn gilt als der Schöpfer der Beziehungen zwischen Mengen bezeichnenden Diagramme in der mathematischen Logik.



Eine andere Darstellungsform ist das Carroll-Diagramm nach Lewis Carroll [Bild links] (1932 bis 1898), einem englischen Mathematiker und Kinderbuchautor (Alice im Wunderland). Das Carroll-Diagramm kann nur die Beziehungen von zwei Mengen beschreiben.



1.3. Spezielle Mengen

1.3.1. Die leere Menge

Eine leere Menge ist eine Menge, die kein Element enthält.	Definition

Eine leere Menge wird in folgender Weise dargestellt: ∅ oder ∅ = { }.

L sei die Menge aller Primzahlen zwischen 24 und 28. L := ∅ oder L := { }	Beispiel

1.3.2. Die Kardinalzahl

Die Anzahl aller Elemente einer Menge nennt man Kardinalzahl.	Definition

Die Kardinalzahl der Menge A wird in folgender Weise dargestellt: $|A|$.

L := {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} $|L| = 7$	Beispiel

1.4. Wichtige Zahlenmengen

1.4.1. Natürliche Zahlen

N	Menge aller natürlichen Zahlen N := {1, 2, 3, 4, ...}	Definition

N0	Menge aller natürlichen Zahlen mit der Null (lies “N Null“). N0 := {0, 1, 2, 3, ...}	Definition

G+	Menge aller geraden natürlichen Zahlen. G+ := {2, 4, 6, ... }	Definition

U+	Menge aller ungeraden natürlichen Zahlen. U+ := {1, 3, 5, 7, ...}	Definition

P	Menge aller Primzahlen. (Hier handelt es sich um natürliche Zahlen, die grösser als 1 sind und nur durch 1 und durch sich selbst teilbar sind.) P := {2, 3, 5, 7, 9, 11, ...}	Definition

1.4.2. Ganze Zahlen

Z	Menge aller ganzen Zahlen. Z := {......., –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, ...}	Definition

Z+	Menge aller positiven ganzen Zahlen. (Diese Menge stimmt mit der Menge der natürlichen Zahlen überein.) Z+ := {1, 2, 3, ...} = N	Definition

Z+0	Menge aller positiven ganzen Zahlen mit der Null. Z+0 := {0, 1, 2, 3, ...} = N0	Definition

1.4.3. Rationale Zahlen

Q	Menge aller rationalen Zahlen. Q := {–3, –½ , –¼, 0, ¼, ½ ...}	Definition

Q+	Menge aller positiven rationalen Zahlen. Q+ := {¼, 1½, 2, 4¾ ...}	Definition

Q+0	Menge aller positiven rationalen Zahlen mit der Null. Q+0 := {0, ¼, 1½, 3, 5¾ ...}	Definition

1.4.4. Reelle Zahlen

R	Menge aller reellen Zahlen. Zahlenwerte, die sich nicht als Bruch zweier natürlicher Zahlen ausdrücken lassen, gehören zu der Menge der irrationalen Zahlen. Die Menge der reellen Zahlen ist die Vereinigung der Menge der rationalen und der irrationalen Zahlen.	Definition

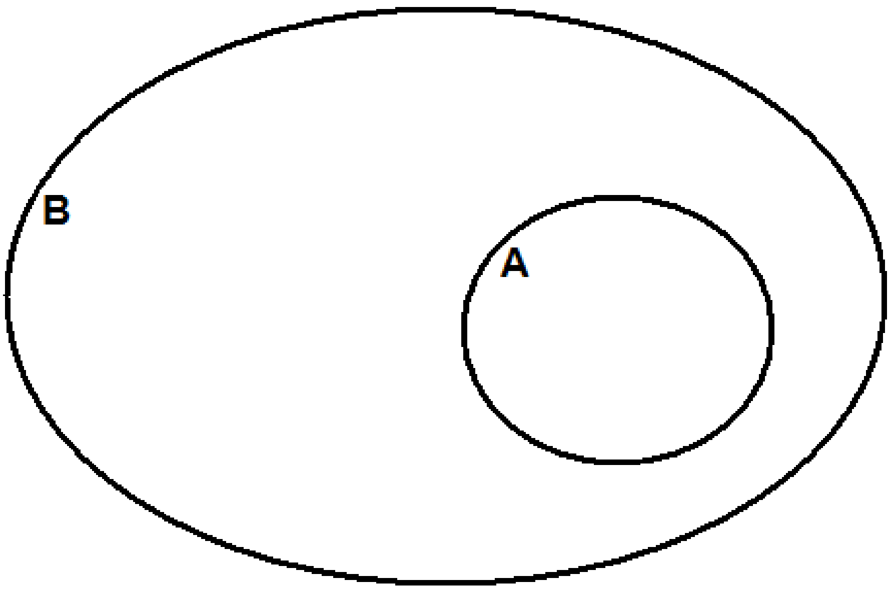
2. Mengenalgebra

2.1. Die Teilmenge

Eine Menge A ist Teilmenge von B ($A \subset B$), falls jedes Element von A auch Element der Menge B ist.	Definition

Gegeben seien die Mengen A und B. A ist als Teilmenge von B grafisch darzustellen.

Es gilt $A := \{2, 3\}$, $B := \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A \subset B$



Beispiel

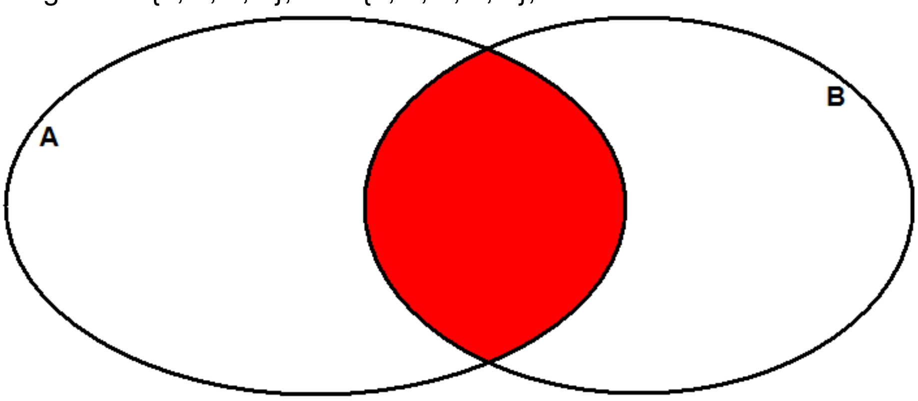
Wichtig: Unterscheiden Sie gut zwischen den Zeichen $\in$ und $\subset$. $\in$ steht zwischen einem Element und einer Menge, $\subset$ steht zwischen zwei Mengen

2.2. Die Schnittmenge

Unter der Schnittmenge S zweier Mengen A und B versteht man die Menge aller Elemente, die sowohl zu A als auch zu B gehören	Definition

Gegeben seien die Mengen A und B. Die Schnittmenge S von A und B ist grafisch darzustellen.

Es gilt $A := \{2, 3, 7, 9\}$, $B := \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $S := A \cap B$.



Beispiel

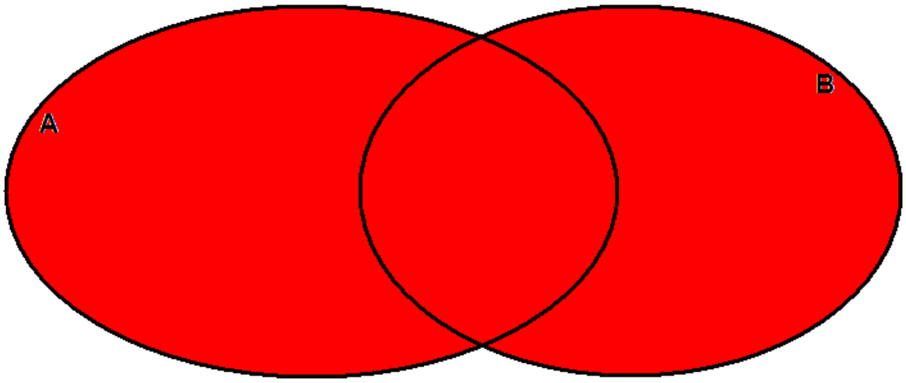
2.3. Die Vereinigungsmenge

Unter der Vereinigungsmenge V zweier Mengen A und B versteht man die Menge aller Elemente, die mindestens einer der beiden Mengen angehören.

Definition

Gegeben seien die Mengen A und B. Die Vereinigungsmenge V von A und B ist graphisch darzustellen.

Es gilt A := {2, 3, 7, 9}, B := {1, 2, 3, 4, 5}, V := A ∪ B



Beispiel

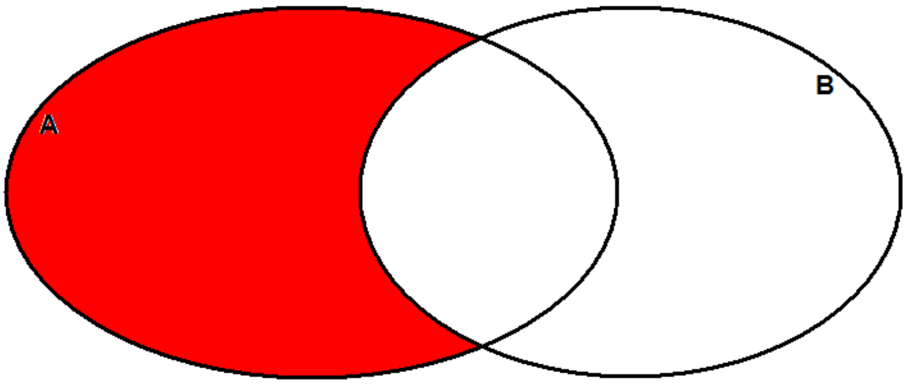
2.4. Die Differenzmenge

Unter der Differenzmenge D (auch Restmenge genannt) ist die Menge der Elemente, die einer Menge A angehören, ohne zugleich auch zur Menge B zu gehören.

Definition

Gegeben seien die Mengen A und B. Die Differenzmenge D von A und B ist graphisch darzustellen.

Es gilt A := {2, 3, 7, 9}, B := {1, 2, 3, 4, 5}, D := A \ B



Beispiel

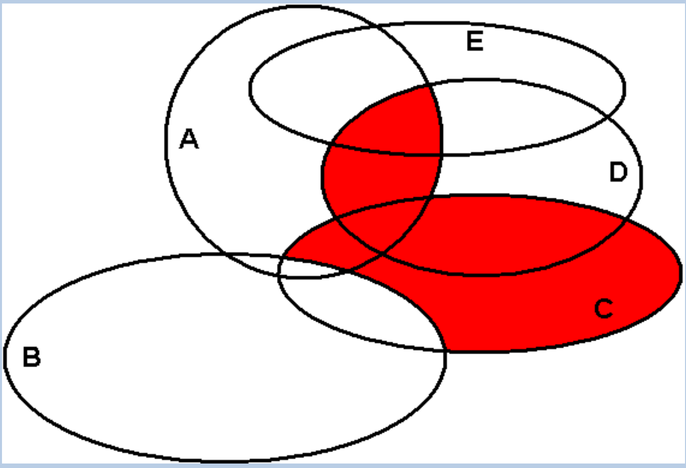
2.5. Rechenprioritäten

Es gilt die folgende Prioritätsreihenfolge:

1. Differenzmenge (Restmenge \)
2. Konjunktion (Schnittmenge ∩)
3. Disjunktion (Vereinigungsmenge ∪)

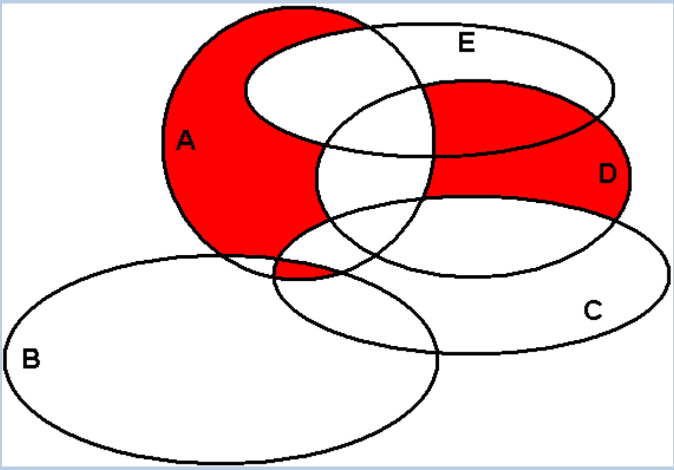
Aufgabe 18: Mengennotation (I)

Beschreiben Sie die farbig markierte Menge in der Notationsweise der Mengenlehre:



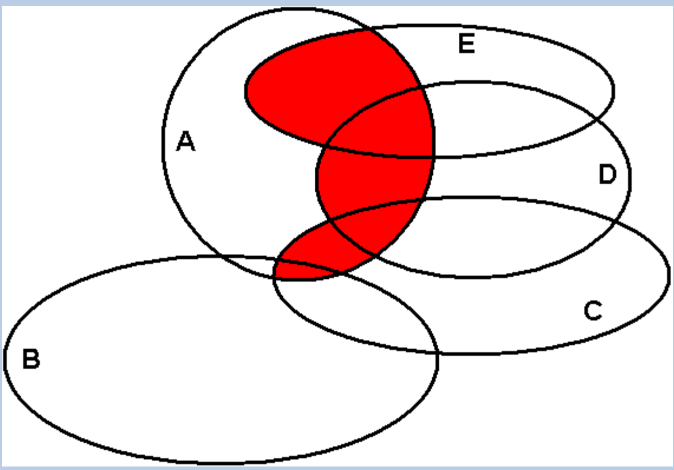
Aufgabe 19: Mengennotation (II)

Beschreiben Sie die farbig markierte Menge in der Notationsweise der Mengenlehre:



Aufgabe 20: Mengennotation (III)

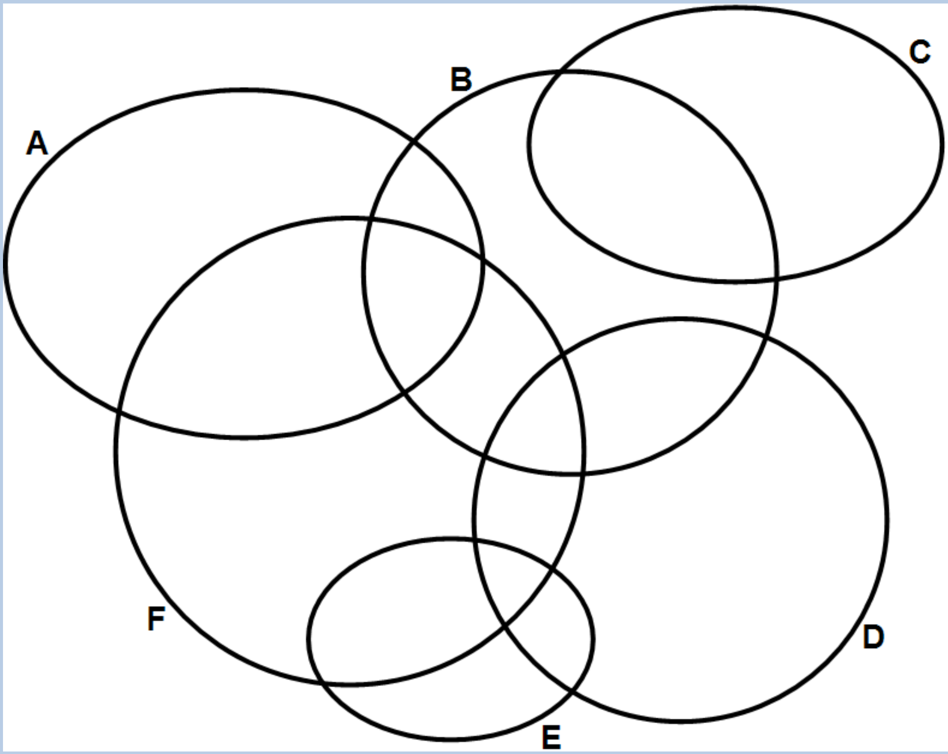
Beschreiben Sie die farbig markierte Menge in der Notationsweise der Mengenlehre:



Aufgabe 21: Mengendarstellung (I)

Markieren Sie folgende Menge in der Grafik mit einer Farbe:

$((B \cup F) \setminus A) \setminus (E \cap D) \cup ((A \cap B) \setminus F) \setminus (B \cap D \cap F)$



Aufgabe 22: Venn-Diagramme

Gegeben sind folgende Mengen

Z = {z | z ist durch 2 ganzzahlig teilbar}

D = {d | d ist durch 3 ganzzahlig teilbar}

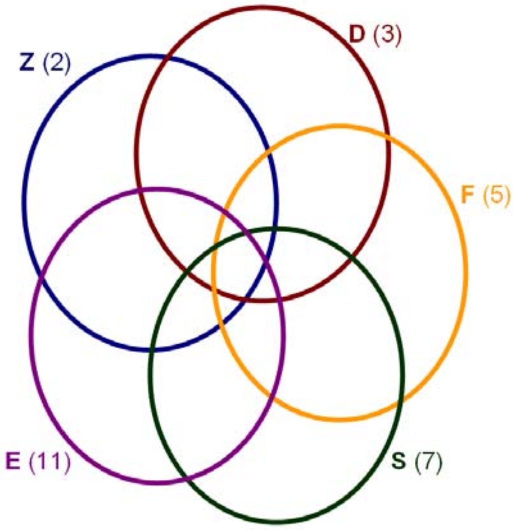
F = {f | f ist durch 5 ganzzahlig teilbar}

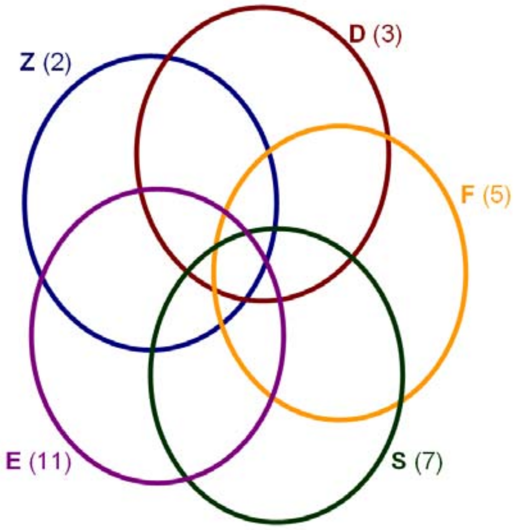
S = {s | s ist durch 7 ganzzahlig teilbar}

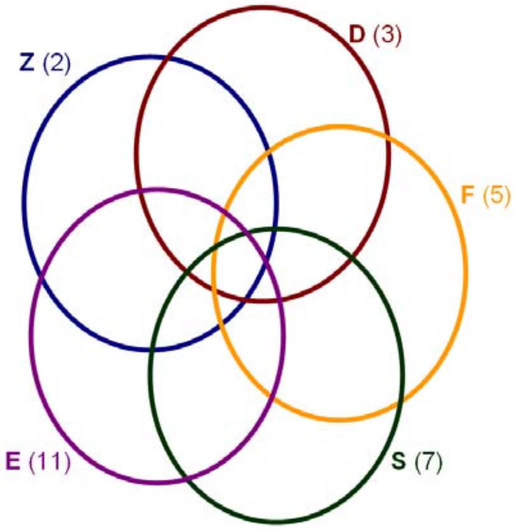
E = {e | e ist durch 11 ganzzahlig teilbar}

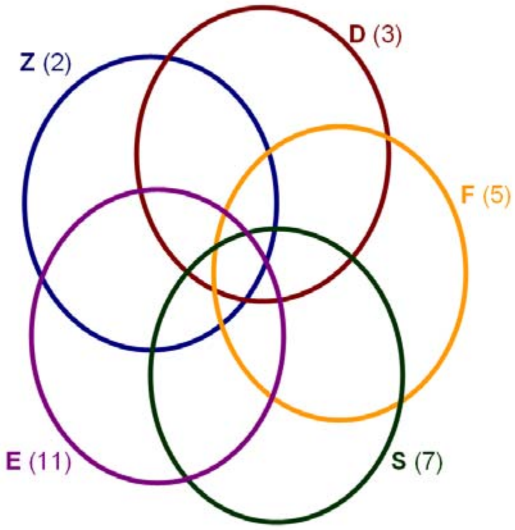
Stellen Sie auf den Venn-Diagrammen der nächsten Seite folgende Zahlenreihen dar:

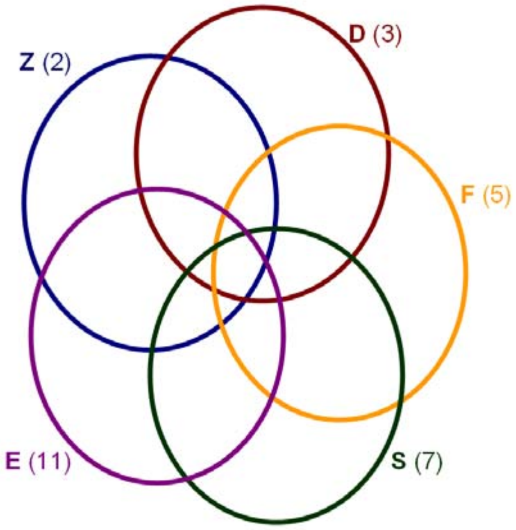
- 6er-Reihe
- 14er-Reihe
- 21iger-Reihe
- 22iger-Reihe
- 35iger-Reihe
- alle Primzahlen zwischen 2 und 10:

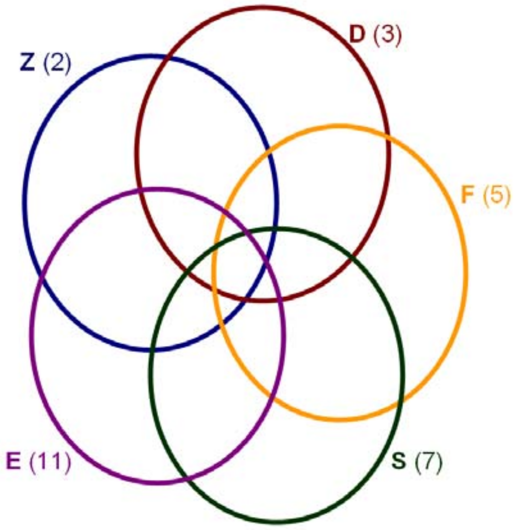

Z (2)
D (3)
F (5)
E (11)
S (7)


Z (2)
D (3)
F (5)
E (11)
S (7)


Z (2)
D (3)
F (5)
E (11)
S (7)


Z (2)
D (3)
F (5)
E (11)
S (7)


Z (2)
D (3)
F (5)
E (11)
S (7)


Z (2)
D (3)
F (5)
E (11)
S (7)

3. Aufgaben zur Mengenlehre

3.1. Kontrollaufgaben zu den Grundlagen

Aufgabe 23: Mengenalgebra (I)

Entscheiden Sie, ob die folgenden Behauptungen richtig oder falsch sind.

	Richtig	Falsch
a) $\lvert -7 \rvert \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$	☐	☐
b) $15 \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$	☐	☐
c) $15 \in \{1, 3, 5, 7, 9, ...\}$	☐	☐
d) $5 \notin \{2, 4\}$	☐	☐
e) $2 \notin \{2, 4\}$	☐	☐

Aufgabe 24: Mengenalgebra (II)

Beschreiben Sie folgende Mengen:

a) V sei die Menge der Vielfachen von 13 zwischen 60 und 70. V = ...

b) W sei die Menge der Vielfachen von 13 zwischen 40 und 50. W = ...

c) S sei die Menge der positiven ungeraden Zahlen, die kleiner als 10 sind. S = ...

d) T sei die Menge aller Vielfachen von 5. T = ...

Aufgabe 25: Mengenalgebra (III)

Wie lautet die Kardinalzahl der Menge der Quadratzahlen zwischen 1 und 10? K = ...

3.2. Kontrollaufgaben zu den wichtigsten Zahlenmengen

Aufgabe 26: Zahlenmengen

Entscheiden Sie, ob die folgenden Behauptungen richtig oder falsch sind.

	Richtig	Falsch
a) $3 \in N$	☐	☐
b) $3 \in Z$	☐	☐
c) $3 \in Q$	☐	☐
d) $-3 \in N$	☐	☐
e) $-3 \in Z$	☐	☐
f) $-3 \in Q+$	☐	☐
g) $-½ \in Q+0$	☐	☐
h) $-½ \in Q$	☐	☐

3.3. Kontrollaufgaben zur Mengenalgebra

Aufgabe 27: Mengenalgebra (IV)

Gegeben seien die Mengen A und B. Die Schnittmenge von A und B ist graphisch darzustellen.

A := {2, 3, 7, 9}, B := {1, 2, 3, 4, 5}, $A \cap B$

Aufgabe 28: Mengenalgebra (V)

Gegeben seien die Mengen A und B. Die Vereinigungsmenge von A und B ist graphisch darzustellen.

A := {2, 3, 7, 9}, B := {1, 2, 3, 4, 5}, $A \cup B$

Aufgabe 29: Mengenalgebra (VI)

Gegeben seien die Mengen A und B. Die Differenzmenge von A und B ist graphisch darzustellen.

A := {2, 3, 7, 9}, B := {1, 2, 3, 4, 5}, A \ B

Aufgabe 30: Mengenalgebra (VII)

Sie wissen: N ist Teilmenge von Z, und Z ist Teilmenge von Q. Wir können somit schreiben: $N \subset Z \subset Q$.

Zeichnen Sie ein entsprechendes Mengendiagramm.

Stellen Sie in diesem Diagramm durch Punkte die folgenden Zahlen dar:

$$-4, 7, \frac{3}{8}, -700$$

Aufgabe 31: Mengenalgebra (VIII)

Entscheiden Sie, ob die folgenden Behauptungen richtig oder falsch sind.

	Richtig	Falsch
a) $N \subset Z$	☐	☐
b) $N \subset Q+$	☐	☐
c) $Q+ \subset Z$	☐	☐
d) $Q+ \subset N$	☐	☐
e) $N0 \subset N$	☐	☐
f) $Z \subset Q$	☐	☐

3.4. Übungsaufgaben zur Mengenalgebra

Aufgabe 32: Mengenalgebra (IX)

Es seien folgende Mengen von natürlichen Zahlen gegeben:

M := {x | 4 teilt x}

N := {x | 100 teilt x}

O := {x | 400 teilt x}

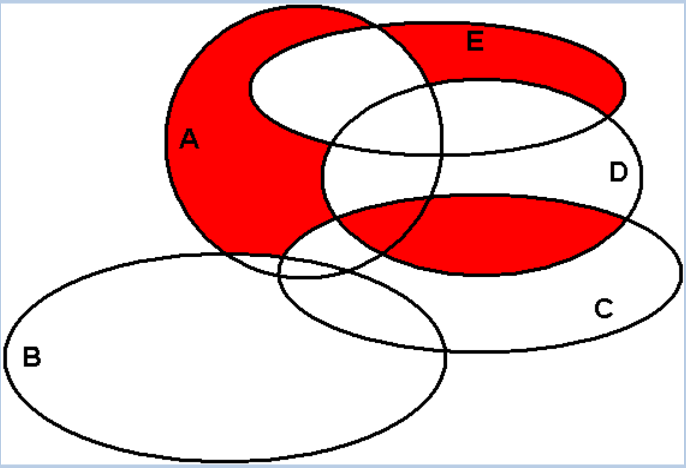
P := {x | 1000 teilt x}

S := {x | x ist ein Schaltjahr}

Formulieren Sie die Menge S mit Hilfe der Mengenoperationen $\cup$, $\cap$ und \ aus den Mengen M, N, O, P. Schaltjahre[3] sind Jahre die durch 4 teilbar sind, ausser den Jahren die durch 100, nicht aber durch 400 teilbar sind, ausser derjenigen 400 Jahre, welche auch gleichzeitig 1000er Jahre sind.

Aufgabe 33: Mengenalgebra (X)

Beschreiben Sie die farbig markierte Menge in der Notationsweise der Mengenlehre:

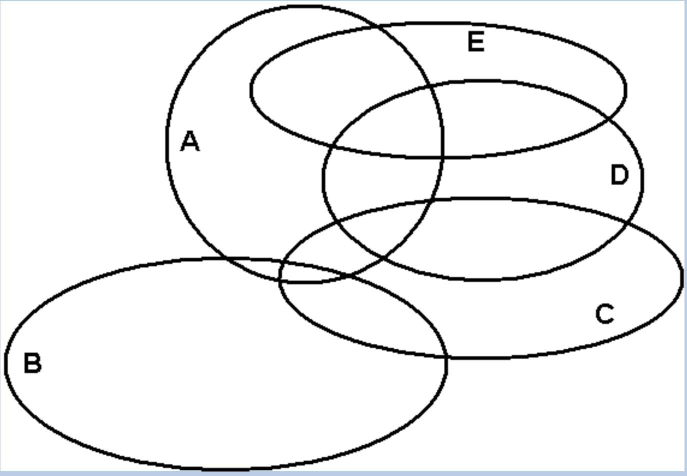


3 In Widerspruch zur Rechenregel aber gem. Konventionen waren 1900 und 2000 Schaltjahre, 2400 ist kein Schaltjahr

Aufgabe 34: Mengenalgebra (XI)

Markieren Sie folgende Menge in der Grafik mit einer Farbe:

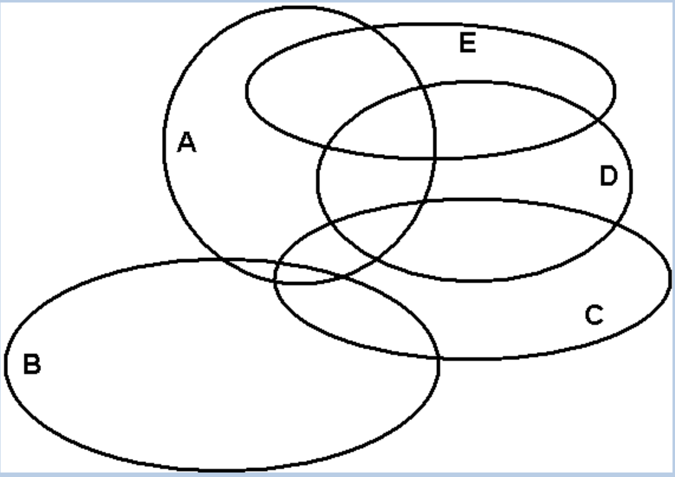
$(B \cup C \setminus A) \cup (A \cap B \cap C) \cup (A \cap C \cap D)$



Aufgabe 35: Mengenalgebra (XII)

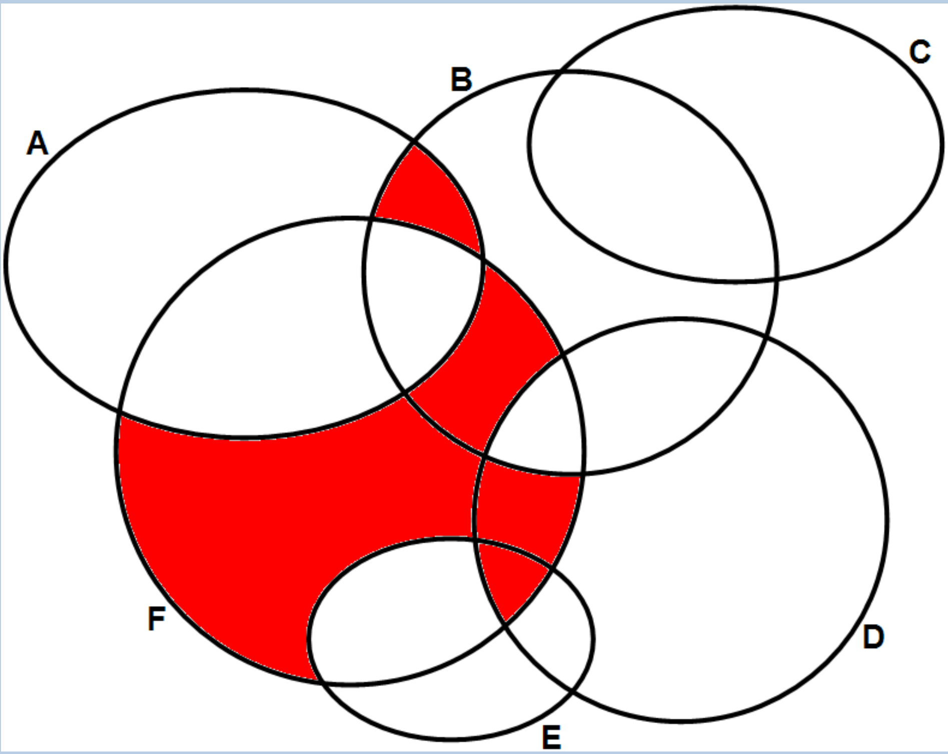
Markieren Sie folgende Menge in der Grafik mit einer Farbe:

$((E \cup C) \setminus A) \cap D$



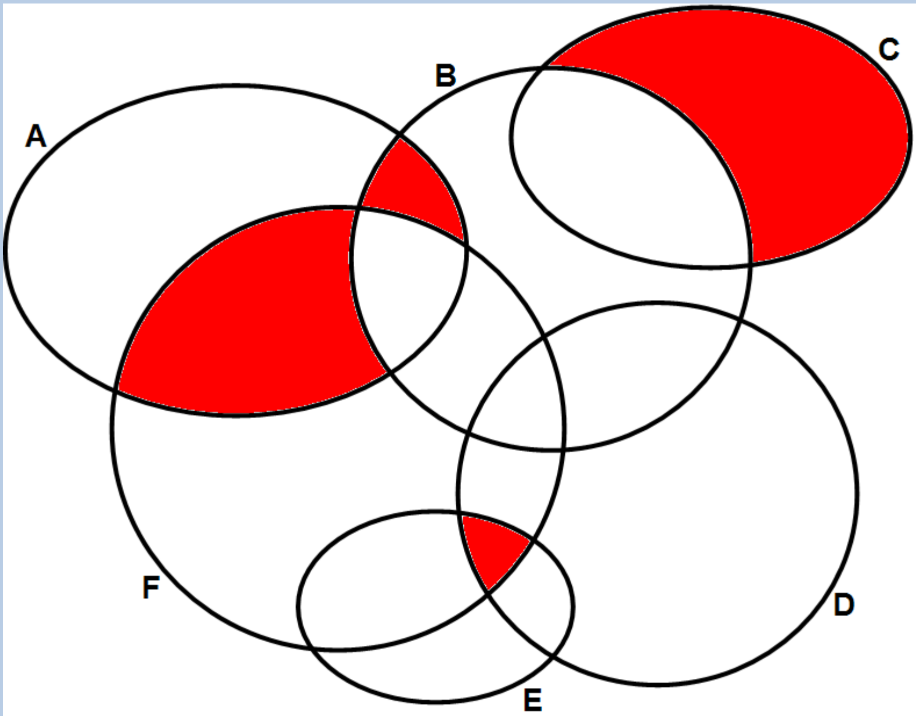
Aufgabe 36: Mengenalgebra (XIII)

Beschreiben Sie die farbig markierte Menge in der Notationsweise der Mengenlehre:



Aufgabe 37: Mengenalgebra (XIV)

Beschreiben Sie die farbig markierte Menge in der Notationsweise der Mengenlehre:



Teil III Algebra

1. Geschichte der Algebra[4]

4-Kopekenmarke der UdSSR-Post von 1983 zum 1200. Jahrestag der Geburt von AL-CHARIZMI.

ABU ABDALLAH MUHAMMAD IBN MUSA AL-CHARIZMI, zu Deutsch: MUHAMMAD, Vater des ABDALLAH (Abdallah bedeuteted "Knecht Gottes"), Sohn des MOSES, aus Choresmien stammend (Gegend südlich des Aralsees; Zwischen Aralsee und Kaspischem Meer), war Astronom und Mathematiker.

Unter dem Kalifen AL-MA'MUN, der von 813 bis 833 in Bagdad regierte, wurde AL-CHARIZMI Mitglied des ‘Hauses der Weisheit’, an dem viele Gelehrte arbeiteten. Man nimmt daher an, dass AL-CHARIZMI vor 800 geboren wurde. Und wenn die Geschichte wahr ist, dass AL-CHARIZMI einer der Astronomen war, die, 847 ans Krankenbett des Kalifen AL-WATIQ gerufen, diesem auf Grund seines Horoskops noch weitere 50 Lebensjahre voraussagten - der Kalif starb nichtsdestotrotz 10 Tage später, dann ist erwiesen, dass AL-CHARIZMI erst nach 847 gestorben ist. Mehr aber ist nicht bekannt über das Leben dieses Mannes, der mehrere Bücher hinterlassen hat, darunter eines, das von vielen Menschen immer wieder studiert wurde. Dieses Buch definiert AL-CHARIZMI im Vorwort wie folgt:

> “Jene Liebe zur Wissenschaft, mit der GOTT den Imam AL-MA’MUN, Beherrscher der Gläubigen ausgezeichnet hat, [...] jene Güte und gönnerhafte Herablassung die er den Lernenden erweist, jene Bereitwilligkeit, mit der er sie beschützt und unterstützt, wenn sie Licht in die dunklen Dinge bringen und Schwieriges bewältigen - all dies hat mich ermutigt,
>
> AL-KITAB AL-MUCHTASAR FI HISAB **AL-DSCHABR** WA-’L-MUQABALA
> ***ein kurzgefaßtes Buch über das Rechnen durch Wiederherstellen und Ausgleichen***
>
> zu schreiben, dabei mich aber zu beschränken auf das Anmutige und Hochgeschätzte des Rechenverfahrens für das, was die Leute fortwährend notwendig brauchen bei ihren Erbschaften und ihren Vermächtnissen, bei ihren Teilungen, ihren Prozeß bescheiden, ihren Handelsgeschäften und bei allem, womit sie sich gegenseitig befassen, aber auch handelnd von der Ausmessung der Ländereien, der Herstellung von Kanälen, der Geometrie und dergleichen anderm nach seinen Gesichtspunkten und Arten.
> Im Vertrauen auf die gute Absicht, die diesem Buch zugrunde liegt, hoffe ich, daß diejenigen, die nun bewandert in dieser Rechenkunst geworden sind, mich belohnen werden, indem sie durch ihre Gebete mich der göttlichen Gnade teilhaftig werden lassen.”

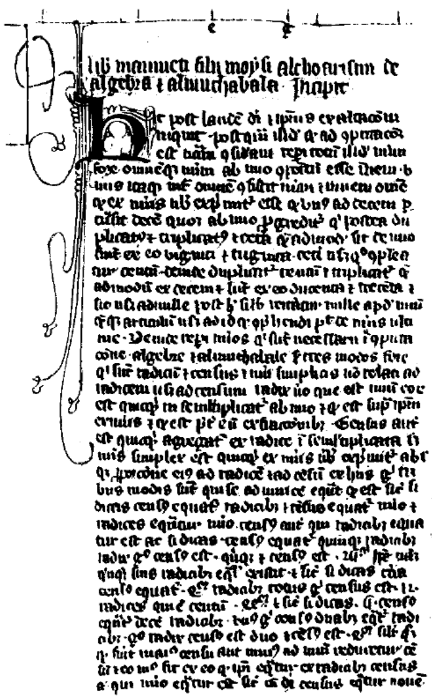
Es ist nicht bekannt, ob AL-CHARIZMI der erste war, der den Wörtern ***al-dschabr*** und ***al-muqabala*** einen mathematischen Sinn gab. Man weiss heute, dass das Substantiv ***al-muqabala*** vom Verbum ***qabala*** kommt, das ‘einander gegenüberstellen’ bedeutet. Bei ***al-dschabr*** gehen die Meinungen aber weit auseinander. Viele Gelehrte vertreten die Ansicht, dass ihm das Verbum ***dschabr*** zugrunde liege in seiner Bedeutung von ‘ein ausgerenktes oder gebrochenes Glied wieder einrichten’. Andere Gelehrte weisen darauf hin, dass ***dschabr*** auch die allgemeinere Bedeutung von ‘zwingen’ hat. Deswegen erklärt der Mathematiker ABU BAKR MUHAMMAD IBN AL-HASAN AL-HASIB AL-KARADSCHI († 1019/29), der auch in Bagdad lebte und wirkte, ***al-dschabr*** sei die Kunst, eine unbekannte Zahl immer näher in das Reich des Bekannten zu zwingen.

[4] Quelle: BARTH, FEDERLE, HALLER: Algebra 1 (Ehrenwirth-Verlag)

Einige Gelehrte vertreten eine ganz andere Ansicht. Sie sagen, bei den alten Assyrern (um 1600 v. Chr.) habe es in der Mathematik bereits ein Wort ***gabru*** gegeben, das die Bedeutung von ‘gleich sein, einander gegenüberstellen’ gehabt habe. Auf verschlungenen Wegen sei die Kenntnis von dieser Rechenkunst schliesslich zu den Arabern gekommen und diese hätten ***gabru*** wie ***dschabr*** ausgesprochen und mit ***muqabala*** übersetzt. Dann sei die ursprüngliche Bedeutung von ***al-dschabr*** vergessen worden und man habe die oben angegebene Erklärung vom ‘Einrichten gebrochener Knochen’ erfunden. Wenn das alles stimmt, dann war es die Absicht des AL-CHARIZMI, ein kurzgefasstes Buch über das Rechnen mittels Gleichungen zu verfassen. Leider ist das Original nicht erhalten geblieben. Die älteste bekannte arabische Abschrift davon stammt aus dem Jahre 1342.

Titelblatt dee ältesten erhaltenen arabischen Handschrift von al-Kitab al-muchtasar fo hisab al-dschabr wa'l-muqabala des ABU ABDALLAH MUHAMMAD IBN MUSA AL-CHARIZIMI (vor 800 - nach 847) von 1342, aufbewahrt in Kairo.

Im Jahre 711 eroberten die Araber fast ganz Spanien und gründeten in Cordoba ein prächtiges Kalifat. Muslime, Christen und Juden lebten dort in Eintracht zusammen und widmeten sich auch den Wissenschaften. So soll die Bibliothek des Kalifen von Cordoba an die 600'000 Handschriften enthalten haben. Die Kunde von der Gelehrsamkeit der Araber drang, von den Teilnehmern an den Kreuzzügen bestätigt, ins christliche Europa, in dem um die Mitte des 11. Jahrhunderts ein Aufschwung wissenschaftlichen Denkens einsetzte. Man interessierte sich wieder für die Werke der alten griechischen Philosophen und Wissenschaftler und musste feststellen, dass sie vielfach nur mehr in arabischer Übersetzung erhalten waren. Deshalb richtete der Erzbischof RAIMUND (zwischen 1130 und 1150) in Toledo, das König Alfons VI. von Kastilien und León den Arabern 1085 entrissen hatte, eine grosse Übersetzerschule ein, um die arabischen Texte ins vertraute Latein übertragen zu lassen. In dieses Toledo zog es auch den 1114 in Cremona geborenen GERHARD. Und die Stadt des Wissens und der Bücher liess ihn nicht mehr los bis er 1187 dort verstarb. Über 90 Werke aus der Philosophie, der Astronomie, der Mathematik, der Alchimie und der Medizin hat er aus dem Arabischen ins Lateinische übersetzt. Darunter auch das in der arabischen Welt berühmt gewordene Rechenbuch des AL-CHARIZMI. GERHARD VON CREMONA nannte es ***liber maumeti filii moysi alchoarismi de algebra et almuchabala***. Heute ist von diesem Buch nur noch eine Abschrift aus dem 14. Jahr-



Liber maumeti filii moysi alchoarismi de algebra et almuchabala. Übersetzung des arabischen Textes ins Lateinische durch GERHARD VON CREMONA (1114 bis 1187). Handschrift des 14. Jahrhunderts, aufbewahrt in der Universitätsbibliothek von Cambridge.

hundert vorhanden. GERHARD VON CREMONA schrieb für das arabische ***al-dschabr*** einfach ***algebra***, weil man damals ein so geschriebenes Wort wie 'aldschebra' aussprach[5]. ***Algebra et almuchabala*** wurden durch GERHARD in Europa zum Namen einer mathematischen Wissenschaft, die man in Italien später auch Ars magna - Die grosse Kunst - nannte. Im 14. Jahrhundert verschwand das ***et almuchabala*** immer mehr und 1577 erschien es zum letzten Mal im Titel eines Buchs. Von da an hiess diese Kunst nur mehr Algebra. Zu einer wahrlich grossen Kunst wurde sie aber erst durch Francois VIÈTE (1540-1603), der 1591 die ***Algebra nova***, die neue Algebra begründete, nämlich das Rechnen mit Buchstaben. VIÈTE glaubte mit seiner Algebra das Ziel erreicht zu haben, jedes Problem lösen zu können: **NULLUM NON PROBLEMA SOLVERE**.

2. Grundlagen

2.1. Die Axiome

Das ganze Gebäude der Mathematik ist auf Grundgesetzen, auch **Axiome** genannt, aufgebaut (ein Axiom ist ein Grundsatz, der nicht bewiesen werden muss).

Diese Grundgesetze müssen so einfach und klar sein, dass man sich nicht über sie zu streiten braucht. Die Gültigkeit der Axiome wird also beweislos vorausgesetzt.

Definition

2.2. Der Term

Variablen sind Platzhalter für Zahlen. Man bezeichnet sie in der Regel mit kleine oder grossen lateinischen Buchstaben.

Rechenausdrücke, die Variablen enthalten, nennt man **Terme.**

Definition

Die Formel "Rechtecksfläche ist Länge mal Breite" lautet mit Variablen geschrieben:

A = l • b

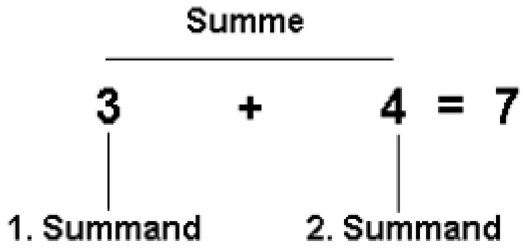
Die Formel "Volumen eines Quaders ist gleich Länge mal Breite mal Höhe" lässt sich mit Variablen folgendermassen schreiben:

V = l • b • h

Beispiel

[5] Ins Spanische und Portugisische ging dieses algebra in der alten Bedeutung des Einrichtens von Knochen ein, denn der Wundarzt heisst in diesen Sprachen algebrista.

2.3. Die Addition



3 + 4 heisst **Summe**. 3 und 7, die Glieder der Summe heissen **Summanden**.

3 + 4 = 7 bedeutet, 3 + 4 ist eine andere Schreibweise für die Zahl 7.

Eine Summe kann auch aus mehr als zwei Summanden bestehen.

Definition

Kommutativgesetz (lateinisch bedeutet commutare vertauschen)

$3 + 7 = 7 + 3$

$a + b = b + a$

In einer Summe darf man die Summanden vertauschen.

Axiom

Assoziativgesetz (lateinisch bedeutet associare verbinden)

$(3 + 7) + 4 = 3 + (7 + 4)$

$(a + b) + c = a + (b + c)$

In einer Summe darf man die Summanden beliebig zu Teilsummen verbinden.

Axiom

Neutrales Element (neutral steht für Einflusslos)

$3 + 0 = 0 + 3 = 3$

$a + 0 = 0 + a = a$

Die Addition der Zahl Null bewirkt keine Veränderung einer Zahl. Die Null ist das “neutrale Element“ der Addition.

Axiom

Terme mit gleichen Variablen heissen gleichartige Terme:

3a; 6a; 13a

Terme mit ungleichen Variablen heissen ungleichartige Terme:

3a; 4b; 17c

Definition

Gleichartige Terme werden addiert, indem man ihre Beizahlen (Koeffizienten) addiert.

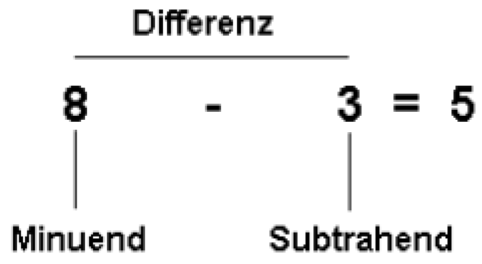
$3a + 6a = (3 + 6) \bullet a = 9a$

In einer Summe lassen sich immer nur gleichartige Terme zu einem Term zusammenfassen!

$2a + 3a + 5b + 4b = 5a + 9b$

Regel

2.4. Die Subtraktion



8 – 3 heisst **Differenz**. 8 und 3, die Glieder der Differenz heissen **Minuend** und **Subtrahend**.

Durch die Subtraktion wird die Addition derselben Zahl rückgängig gemacht; die Subtraktion ist somit die Umkehrfunktion der Addition.

$7 + 3 - 3 = 7$

Definition

Die Subtraktion von Zahlen ist **nicht kommutativ**.

$3 - 7 \neq 7 - 3$

$a - b \neq b - a$

In einer Differenz dürfen Minuend und Subtrahend nicht vertauscht werden!

Axiom

Die Subtraktion von Zahlen ist **nicht assoziativ**.

$(7 - 3) - 2 \neq 7 - (3 - 2)$

$(a - b) - c \neq a - (b - c)$

In einer Summe dürfen einzelne Terme nicht zusammengefasst werden!

Axiom

Neutrales Element

$3 - 0 = 3$

$a - 0 = a$

Die Subtraktion der Zahl Null bewirkt keine Veränderung einer Zahl. Die Null ist das “neutrale Element“ der Subtraktion.

Axiom

Gleichartige Terme werden subtrahiert, indem man ihre Beizahlen (Koeffizienten) subtrahiert.

$6a - 3a = (6 - 3) \cdot a = 3a$

In einer Differenz lassen sich immer nur gleichartige Terme subtrahieren!

$3a - 2a - 5b - 2b = a - 7b$

Regel

2.5. Rechnen mit Klammern

Beim Auflösen einer Klammer, vor der ein Pluszeichen steht, verändern sich die Rechenzeichen ihrer Glieder nicht.

$c + (a + b) = c + a + b$

$c + (a - b) = c + a - b$

Regel

Beim Auflösen einer Klammer, vor der ein Minuszeichen steht, werden alle Rechenzeichen ihrer Glieder umgekehrt.

$c - (a + b) = c - a - b$

$c - (a - b) = c - a + b$

Regel

Sind in einer algebraischen Summe (kann aus Summen und Differenzen bestehen!) Terme in Klammern ihrerseits von Klammern eingeschlossen, so löst man unter Beachtung der Rechenzeichen zunächst die <u>inneren</u> Klammern auf und dann nacheinander die <u>äusseren</u> Klammern.

$a - \{b + [c - (d + e)]\}$

$= a - \{b + [c - d - e]\}$

$= a - \{b + c - d - e\}$

$= a - b - c + d + e$

Regel

Aufgabe 38: Addition, Subtraktion und Klammern

Lösen Sie die Klammern auf.

a) $20a + (3b - 2a) =$

b) $20a - (3b + 2a) =$

c) $20a - (3b - 2a) =$

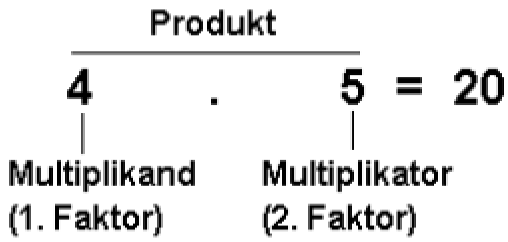
Aufgabe 39: Verschachtelte Klammern

Lösen Sie die Klammern auf (innere Klammern zuerst auflösen).

a) $10a - [2a - (3b - 1b) + 5a] =$

b) $25a - [(14a - 9b + 3c) - (9a + 13b)] =$

2.6. Die Multiplikation



Definition

Kommutativgesetz

3 • 7 = 7 • 3

a • b = b • a

In einem Produkt darf man die Faktoren miteinander vertauschen.

Axiom

Assoziativgesetz

(3 • 7) • 4 = 3 • (7 • 4)

(a • b) • c = a • (b • c)

Beim Multiplizieren darf man die Faktoren zu Teilprodukten zusammenfassen.

Axiom

Neutrales Element

3 • 1 = 1 • 3 = 3

a • 1 = 1 • a = a

Die Multiplikation mit der Zahl Eins bewirkt keine Veränderung einer Zahl. Die Eins ist das “neutrale Element“ der Multiplikation.

Bei der Multiplikation mit (–1) erhält man die Gegenzahl.

Axiom

Multiplikation mit der Zahl Null

3 • 0 = 0 • 3 = 0

a • 0 = 0 • a = 0

Ist in einem Produkt mindestens ein Faktor Null, so ist das ganze Produkt gleich Null.

Regel

2.7. Die Division

Quotient (Bruch)

Dividend (Zähler) — 8
Divisor (Nenner) — 4

$$\frac{8}{4} = 2$$

Wenn der Zähler kein Vielfaches des Nenners ist, so entsteht eine neue Zahl, Bruch genannt.

Ein Bruch ist ein **Quotient** ganzer Zahlen. Die Teilungszahl heisst **Zähler** oder **Dividend**, der Teiler heisst **Nenner** oder **Divisor**.

Beide zusammen bilden einen **Quotienten**.

Eine Division durch Null ist nicht erlaubt!

Definition

Die Division von Zahlen ist **nicht kommutativ**.

$8 : 2 \neq 2 : 8$

$a : b \neq b : a$

In einem Bruch dürfen Zähler und Nenner nicht vertauscht werden!

Axiom

Die Division von Zahlen ist **nicht assoziativ**.

$(16 : 4) : 2 \neq 16 : (4 : 2)$

$(a : b) : c \neq a : (b : c)$

In einer Reihe von Divisionen dürfen einzelne Terme nicht zusammengefasst werden!

Axiom

Neutrales Element

$3 : 1 = 3$

$a : 1 = a$

Das dividieren einer Zahl durch die Zahl Eins bewirkt keine Veränderung einer Zahl. Die Eins ist das “neutrale Element“ der Division.

Axiom

Aufgabe 40: Multiplikation

a) $3 \cdot (-2) =$

b) $(-3) \cdot (-2) =$

c) $2x \cdot (-4a) =$

Aufgabe 41: Division

a) $-75/-5 =$

b) $\frac{30abn}{3b} =$

c) $\frac{49cy}{14by} =$

Aufgabe 42: Ausmultiplizieren – Addition und Multiplikation

a) x + x * x + x =

b) (x + x) * x + x =

c) x + x * (x + x) =

d) (x + x) * (x + x) =

Aufgabe 43: Ausdividieren – Addition und Division

a) a + a : a + a =

b) (a + a) : (a + a) =

c) (a + a) : a + a =

d) a + a : (a + a) =

Aufgabe 44: Ausmultiplizieren

a) c ● (a + b) =

b) 2x ● (a - 3b) =

c) $(a + b)^2$ =

d) $(a - b)^2$ =

e) (a + b) • (a - b) =

f) (a + 3) • 6 =

g) (n – 2m) • (3ab + b - c) =

Aufgabe 45: Ausklammern

a) $10a^2z + 20ayz$ =

b) $\frac{az + bz}{z} =$

c) $\frac{30x - 6bx}{60c - 12bc} =$

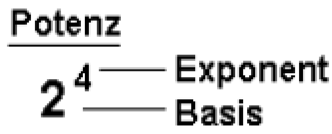
Aufgabe 46: Bestimmen des Klammerausdrucks

a) -7x + 14xy = -7x • (…)

b) $ax^2 - 6x^3 = x^2 \bullet (...)$

c) $\frac{5}{3}a + 5a^2 - \frac{10}{3}a^3 = 5a \bullet (...)$

2.8. Die Potenz



Definition

Eine Potenz mit natürlichem Exponenten ist die abgekürzte Schreibweise eines Produkts aus gleichen Faktoren

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots\ldots\ldots \cdot a}_{\text{n-mal}} = a^n$$

Regel

Vorzeichen beim Potenzieren:

Eine positive Basis ergibt immer ein positives Ergebnis.

<u>Beispiele:</u> $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$
$16^2 = 16 \cdot 16 = 256$

Eine negative Basis und ein gerader Exponent ergeben immer ein positives Ergebnis.

<u>Beispiele:</u> $–3^4 = –3 \cdot –3 \cdot –3 \cdot –3 = 81$
$–16^2 = –16 \cdot –16 = 256$

Eine negative Basis und ein ungerader Exponent ergeben immer ein negatives Ergebnis.

<u>Beispiele:</u> $–3^3 = –3 \cdot –3 \cdot –3 = –27$
$–16^3 = –16 \cdot –16 \cdot –16 = –4‘096$

Ist der Exponent eine negative ganze Zahl, dann gilt: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

<u>Beispiel:</u> $3^{-3} = \frac{1}{3^3} = 0.037037...$

Regel

Spezialfall **Potenz Null**

Ist der Exponent eine Null, ist das Ergebnis immer eine Eins.

$a^0 = 1$

<u>Beispiele:</u> $3^0 = 1$
$16^0 = 1$

Potenzen zusammenfassen:

Potenzen mit gleichen Basen lassen sich zusammenfassen.

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Beispiele: $3^2 \cdot 3^6 = 3^8$

$$\frac{4^6}{4^4} = 4^2$$

Potenzen mit gleichen Exponenten lassen sich zusammenfassen.

$a^m \cdot b^m = (ab)^m$

$$\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$$

Beispiele: $3^2 \cdot 7^2 = 21^2 = 441$

$$\frac{4^6}{6^6} = \left(\frac{4}{6}\right)^6$$

Die Potenz einer Potenz lässt sich zusammenfassen.

$$\left(a^m\right)^n = a^{mn}$$

Beispiele: $\left(3^2\right)^4 = 3^{2 \bullet 4} = 3^8 = 6'561$

$$\left(4^2\right)^2 = 4^4 = 256$$

Regel

Aufgabe 47: Potenzen

a) $4a^3 + 5a^3 =$

b) $2x^3 \bullet -5x^4 =$

2.9. Der Logarithmus

Der Logarithmus ist die Umkehr von der Potenzrechnung. Die Frage nach dem Logarithmus geht genau umgekehrt an die Potenzrechnung heran: Es wird nämlich nicht nach dem Ergebnis von a^2, b^3 etc. gefragt, sondern nach dem Exponenten welcher aus einer Basis eine Potenz generiert, beispielsweise durch welchen Exponenten wird die 5 zur 625.

Die Antwort wäre 4, da $5^4 = 625$ ist. Der Logarithmus ist also die Antwort auf $5^x = 625$. Dies wird wie folgt ausgesprochen: „Der Logarithmus zur Basis 5 von 625“, und wie folgt geschrieben: $\log_5 625 = 4$.

<u>Beispiele:</u>

$\log_5 25 = 2$
$\log_2 128 = 7$
$\log_2 0{,}25 = -2$
$\log_4 1024 = 5$
$\log_{16} 256 = 2$

Mit dem Taschenrechner, welcher über die Logarithmusfunktion zur Basis 10 (log) bzw. den Logarithmus Naturalis (ln) verfügt, kann der Logarithmus zu jeder beliebigen Basis mit folgender Formel berechnet werden.

$$\text{Logarithmus zur Basis von P} = \frac{\log_{10} P}{\log_{10} \text{Basis}} \quad \text{oder}$$

$$\text{Logarithmus zur Basis von P} = \frac{\ln P}{\ln \text{Basis}}$$

<u>Beispiel:</u>

$3^x=243$

Der Wert des Exponenten x wird ermittelt, indem der $\log_{10}$ der Potenz durch den $\log_{10}$ der Basis geteilt wird.

$$\text{Exponent} = \frac{\log_{10} 243}{\log_{10} 3} = \frac{2.3856}{0.4771} = 5$$

⇨ $3^5=243$

Aufgabe 48: Logarithmen

a) $3^a = 81$

b) $5^x = 78'125$

3. Aufgaben zur Algebra

3.1. Kontrollaufgaben zur Addition

Aufgabe 49: Algebra Addition (I)

a) Die Summe 3a + 6a + 9a besteht aus ________ Summanden.

b) Beim Term 17z wird die Zahl 17 als _________________ bezeichnet.

c) Die Terme 5x; 3x; 27x sind ☐ gleichartig ☐ ungleichartig

d) In einer Addition kann man nur _______________________________ zu einem Term zusammenfassen

Aufgabe 50: Algebra Addition (II)

a) 7a + 9a + 4a = ...

b) 2xy + 3xy + 11xy = ...

c) 1.3x + 0.6y + 2.7x + 0.1y + 10 = ...

d) ¼ y + ½x + ¾y + 1.5 x + 3 = ...

Aufgabe 51: Algebra Addition (III)

Setzen Sie in den folgenden Aufgaben für a = 3 ; b = 2 und x = ½ ein.

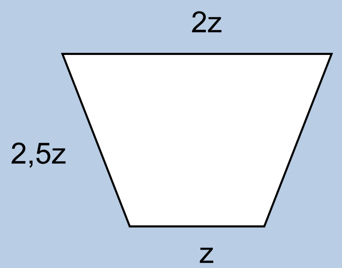
4a + 5b + 6a + 3b = ...

10ab + 4bx + 5ax = ...

6x + 0,5a + ¼b = ...

Aufgabe 52: Algebra Addition (IV)

Berechnen Sie den Umfang U dieser Figur:



a) mit Variablen ausgedrückt: ....

b) mit z = 6 Meter ....

3.2. Kontrollaufgaben zur Subtraktion

Aufgabe 53: Algebra Subtraktion (I)

a) Die Terme einer Subtraktion heissen ____________ und _____________.

b) In einer Subtraktion kann man nur _____________________ Terme zusammen verrechnen.

Aufgabe 54: Algebra Subtraktion (II)

a) 13a - 9a - a = ...

b) 52xy - 3xy - 19xy = ...

c) 1,3x + 0,6y - 0,9x - 0,1y + 10 = ...

d) ¼ y + ½x - ¾y - 0,5 x + 7 = ...

3.3. Kontrollaufgaben zum Rechnen mit Klammern

Aufgabe 55: Algebra Klammernrechnen

Lösen Sie die Klammern auf.

a) 20a + (3b – 2a) = ...

b) 20a – (3b + 2a) = ...

c) 20a – (3b – 2a) = ...

3.4. Kontrollaufgaben zur Multiplikation

Aufgabe 56: Algebra Multiplikation

a) (a + 3) • 6 = ...

b) (-x + 1.6y) • (-5) = ...

c) n • (3ab + b + c) = ...

d) 8 • (x – y) + 11 • (x + y) = ...

3.5. Kontrollaufgaben zur Division

Aufgabe 57: Algebra Division

a) $\frac{az+bz}{z} =$ ....

b) $\frac{30x-6bx}{60c-12bc} =$ ....

c) erweitern Sie auf den Nenner 21ab: $\frac{4x}{7a}$ ....

d) suchen Sie den passenden Zähler

$\frac{11a}{-3b} = \frac{\quad}{-18bc}$ ....

e) $\frac{a+y}{2a} - \frac{a-y}{2a} =$ ....

3.6. Kontrollaufgaben zu den Potenzen

Aufgabe 58: Algebra Potenzen

a) $a^6 \cdot a^7 =$ ....

b) $4a^3 \cdot 2a^4 =$ ....

c) $(a + b)^2 =$ ....

d) $(a - b)^2 =$ ....

e) $(a + b) \cdot (a - b) =$ ....

f) $(4c - 9d)^2 =$ ....

g) $(x^2 - 9) \cdot (x^2 + 9) =$ ....

h) $(a - b - c)^2 =$ ....

i) $(x - 9) \cdot (x - 4) =$ ....

3.7. Kontrollaufgaben zum Logarithmus

Aufgabe 59: Algebra Logarithmen

Ermitteln Sie die Exponenten zu folgenden Potenzen:

a) $5^x = 125$

b) $8^x = 16'777'216$

c) $11^x = 161'051$

d) $2^x = 256$

3.8. Gemischte Aufgaben Algebra

Aufgabe 60: Algebra (I)

a) $178x + 89n + 120x + 60x + 17n =$ ....

b) $55c - 62d - 28c + 46d =$ ....

c) $(84a - 29x) - (73a - 125x) =$ ....

d) $16a \cdot (-7b) \cdot (-3c) =$ ....

e) $(6a + 2b) \cdot (9 - x) =$ ....

f) $(3a + 4) \cdot (b - 11) =$ ....

g) $4a^4 + 3a^4 + 2a^8 + 10a^8 =$ ....

h) $9a^2b^2c - (5a^2b^2c - 3a^2b^2c + 6a^2b^2c) + 7 =$ ....

i) $26p - 19p - 3p =$ ....

Aufgabe 61: Preisdifferenz Projektkosten

Der Unterschied zwischen den Kostensätzen von Softwareentwicklern der Firma A und denjenigen der Firma B ist für die Projektvergabe durch einen Auftraggeber massgebend. Beschreiben Sie den Preisunterschied algebraisch in CHF für ein Projekt, für welches 2380 Arbeitsstunden budgetiert sind.

Aufgabe 62: Algebra (II)

a) $a^3 \cdot a^2 =$ ....

b) $3a^4 \cdot 2a^5 =$ ....

c) $64a^2c^3 + 56a^3c^2 =$ ....

d) $4a^3b^2 - 12a^2b^3 - 16ab^2 =$ ....

e) $\dfrac{15an}{-3b} =$ ....

f) -25/-5 = ...

g) $\dfrac{49ax}{7bx} =$ ....

h) $\dfrac{ax + bx}{x} =$ ....

Aufgabe 63: Algebra (III)

a) $\dfrac{15x - 6bx}{20c - 8bc} =$ ....

b) Erweitern Sie $\dfrac{4x}{3a}$ auf den Nenner 21ab ....

c) $\dfrac{7a}{-3b} = \dfrac{}{-21bc} =$ ....

d) $\dfrac{x + y}{2a} - \dfrac{x - y}{2a} =$ ....

e) $\dfrac{3x}{6} + \dfrac{5x}{9} =$ ....

f) $\dfrac{6x}{bx} \bullet \dfrac{bc}{18x} =$ ....

g) $\dfrac{a + b}{4x + 4y} \bullet \dfrac{5x + 5y}{a - b} =$ ....

h) $\dfrac{144abx}{3c} \div 12ax =$ ....

i) $\dfrac{a}{a + b} \div \dfrac{x}{a + b} =$ ....

j) $\dfrac{(8ac - 4adx - a)}{2a} =$ ....

k) $\dfrac{18ax}{(9ac - 36ad + 18ax)} =$ ....

Aufgabe 64: Algebra (IV)

a) (-15a) + (-14a) =

b) 3a * (a + 5c) =

c) a * ab =

d) -5s - (-12s) - 8s =

e) 4a + 4b + 3 + a =

f) -3a - 5a + (-7c) - c =

g) 2a - (5b - a) =

h) 3 * b * -7 * b * 5 =

i) (-3x) * (-2y^3) * 4 – 6 =

j) ba * a * b =

k) uw * uw =

l) ausklammern: 10a^2z + 20ayz =

m) (15xy + 55xy) : 5x =

n) 15a – 3 * (x + 5a) =

o) (p^2qc + pr) : p =

p) 13x – 7 * (2 + 3x) =

Aufgabe 65: Algebra (V)

Vereinfachen Sie folgende Terme:

a) 18a - 3x + 6a - 3 • (x + a) - 5 • (a - 2x) =

b) 15ax + 3ax - 7a • (-2x) =

c) 2 • 4a • 3b + 5a • 2b - 18ab =

d) -3 • (x^2 - x) + (x^2 -2x + 3) • (-2) =

e) 6.5x - [5x - x • (3 - 4x) + 2] • (-0.5) =

f) x - 5x • (x^2 - 3x) • (-4) - 5x^2 =

g) 5 • (2x - ax) - 5 • 4x - 5ax =

h) (2 - 3x) • x - x • (-14) =

i) 1.05 • (x + x • 1.05) + 1.05^2 • x =

j) $-\frac{a^2}{2}-\left(\frac{3}{2}a\right)^2+\frac{1}{4}\bullet(2-2a^2)$ =

Aufgabe 66: Algebra (VI)

Bestimmen Sie jeweils den Klammerausdruck:

a) -7x + 14xy = -7x • (…)

b) ax^2 - 6x^3 = x^2 • (...)

c) $\frac{5}{3}a+5a^2-\frac{10}{3}a^3=5a\bullet(...)$

d) 1.5a - 2.5ab + 0.5a^2 = 0.5a • (...)

Teil IV Aussagen und Aussageformen

1. Das Buch des Archimedes[6]

Archimedes, einer der genialsten Mathematiker aller Zeiten, schrieb ungefähr 220 v. Chr. einen überaus bedeutenden und nützlichen mathematischen Text. Dass dieser Text uns heute noch (einigermassen originalgetreu) vorliegt, grenzt an ein Wunder, denn im stürmischen Auf und Ab der Geschichte der letzten 2000 Jahre erlitt er tausend Tode. Mangels E-Mails, Faxgeräten und ähnlichen modernen Annehmlichkeiten sandte Archimedes eine handgefertigte Abschrift des Textes an seinen Freund Eratosthenes, der damals an der Bibliothek von Alexandria arbeitete. Die Papyrusrolle erreichte das Ziel nach einer Schiffsreise, die sicherlich Wochen dauerte. Und zweifellos liess Eratosthenes einige Abschriften des Textes anfertigen, um sie den Studierenden an der Bibliothek zugänglich zu machen. Zu diesem Zeitpunkt existierten also ungefähr fünf oder sechs Exemplare.

Weder das Original von Archimedes noch die Abschriften in Alexandria sind uns erhalten geblieben; sie alle verschwanden für immer im Dunkel der Geschichte. Spätere Abschriften muss es aber zweifellos gegeben haben, denn der Mathematiker Heron erwähnte den Archimedes-Text in einem seiner Werke aus der Mitte des ersten nachchristlichen Jahrhunderts. Er muss ihn also gekannt haben. Aber auch alle allfälligen Abschriften aus dieser frühen Zeit sind uns nicht erhalten.

Das Schlimmste stand dem Text noch bevor: Zuerst schaffte der Text den Wechsel zum Kodex nur knapp; dieser dem Wechsel von Schallplatte zu CD vergleichbare Wechsel des Speichermediums fand zwischen dem 1. und dem 4. Jahrhundert statt, und viele antike Texte, die nicht übertragen wurden, gingen so für immer verloren. Später überlebte der Text nur mit viel Glück zahlreiche Brände und Plünderungen grosser Städte (und damit wichtiger Bibliotheken) im 5. und 6. Jahrhundert. Im Jahr 1229 existierte, wie man heute annimmt, bloss noch eine einzige Abschrift des Textes auf Pergament. Und dieser stand nun ihre schwerste Prüfung bevor:

Der Ostersonntag dieses Jahres fiel auf den 14. April, und an diesem Tag beschloss der Geistliche Johannes Myronas, etwas Gutes zu tun. Er beabsichtigte, christliche Gebete auf Pergament zu schreiben, weil er sich von diesem Akt eine Aufbesserung seines Seelenheils versprach. Da Pergament aber Mangelware war, suchte er in seiner Klosterbibliothek nach einem alten, schon beschriebenen Pergament, das lange niemand mehr benutzt hatte und das folglich wertlos war. Er fand eines, schabte es ab und behandelte es mit Säure, um es wieder nutzbar zu machen. Es war das einzige noch erhaltene Exemplar des Archimedes-Textes.

In den folgenden Jahrhunderten blieb dieses so genannte Palimpsest fast immer verschwunden. Zwischendurch tauchte es im Kloster Mar Saba (im heutigen Israel) auf, dann in Konstantinopel und Mitte des 20. Jahrhunderts in Paris. Und am 19. Januar 1999 wurde es vom Auktionshaus Christie's in New York für 2,2 Millionen Dollar an einen reichen Amerikaner verkauft. Dieser beauftragte das renommierte Kunstmuseum Walters in Baltimore mit der Rekonstruktion. Dank modernster Technik (und viel Mathematik) konnte der Archimedes-Text trotz den vielen Mordversuchen, die auf ihn verübt worden waren, wieder lesbar gemacht werden, und erst heute, nach einer abenteuerlichen Reise durch 2200 Jahre Geschichte, funkelt uns das Genie des grossen Archimedes aus dem Text entgegen, unzerstörbar, tausendfach vervielfältigt und damit endlich sicher vor den Stürmen und den Attacken der zukünftigen Geschichte.

[6] Mittellandzeitung, 31. März 2009, von Armin P. Barth

2. Gleichungen und Ungleichungen

2.1. Die Gleichung

2.1.1. Definitionen

Eine Aussage, in der neben Zahlen und Rechenzeichen ein Gleichheitszeichen (=) vorkommt, heisst **Gleichung**.

Eine Gleichung kann eine wahre oder eine falsche Aussage sein. Eine Gleichung ist eine wahre Aussage, wenn auf beiden Seiten Zeichen für dieselbe Zahl stehen.

Die Wahrheitswerte einer Aussage sind wahr oder falsch.

Definition

Gleichung	Wahrheitswert
$17 + 3 = 20$	wahr
$2 \bullet 3 = 5$	falsch

Beispiel

Zahlen für x, welche die Aussageform zu einer wahren Aussage machen, fasst man in der Lösungsmenge zusammen. Bei einfachen Gleichungen findet man diese Zahlen durch Probieren.

Die Menge aller Werte, die als Lösungsmenge in Frage kommen, heisst Grundmenge.

Regel

$2x - 30 = 50$

x muss 40 sein, weil $80 - 30 = 50$

Die Lösungsmenge hat ein Element, $L = \{40\}$

Beispiel

Kann man die Lösungsmenge einer Gleichung nicht sofort angeben, so wird man versuchen, diese schrittweise so umzuformen, dass sie immer einfacher wird.

Die Umformungen müssen derart sein, dass alle umgeformten Gleichungen dieselbe Lösungsmenge haben (äquivalente Umformungen).

Regel

Ausgangsgleichung	$5x - 7 = 13$	$L = \{4\}$
1. Umformung	$5x - 7 + 7 = 13 + 7$	$L = \{4\}$
2. Umformung	$5x = 20$	$L = \{4\}$
3. Umformung	$5x : 5 = 20 : 5$	$L = \{4\}$
4. Umformung	$x = 4$	$L = \{4\}$

Beispiel

Eine Gleichung wird äquivalent umgeformt, wenn man auf beiden Seiten dieselbe Zahl (denselben Term) addiert oder subtrahiert. Eine Gleichung wird äquivalent umgeformt, wenn man auf beiden Seiten dieselbe von 0 verschiedene Zahl (denselben Term, dessen Wert nicht 0 ist) multipliziert oder dividiert.	Regel

Ausgangsgleichung	3x – 15 = –4x – 1		Beispiel
1. Umformung	3x – 15 + 15 = –4x –1 + 15	*+15*	
	3x = –4x + 14		
2. Umformung	3x + 4x = –4x + 4x + 14	*+4x*	
	7x = 14		
3. Umformung	7x : 7 = 14 : 7	*:7*	
	x = 2	L = {2}	

2.1.2. Lösungstechnik

Der Lösungsweg einer Gleichung wird mittels zwei Spalten dargestellt. Die linke Spalte beinhaltet die eigentliche Gleichung in den Schritten des Umformungsprozesses, die rechte Seite zeigt die einzelnen Umformungsschritte.	Regel

4x – 10	=	8 + 6x	–4x	Beispiel
4x – 10 – 4x	=	8 + 6x – 4x	vereinfachen	
–10	=	8 + 2x	–8	
–10 – 8	=	8 + 2x – 8	vereinfachen	
–18	=	2x	:2	
–18 : 2	=	2x : 2	vereinfachen	
–9	=	x		

2.2. Die lineare Gleichung

Gleichungen, die man durch Umformung auf die Form **ax + b = 0** bringen kann, heissen lineare Gleichungen.	Definition

Ausgangsgleichung	$3(4x - 8) + 2 = -5(-2x + 4) + 20$	Klammer ausrechnen und zusammenfassen	Beispiel
1 Umformung	$12x - 24 + 2 = 10x - 20 + 20$		
	$12x - 22 = 10x$	$-10x$	
2. Umformung	$2x - 22 = 0$	$+22$	
	$2x = 22$	$: 2$	
3. Umformung	$x = 11$	$L = \{11\}$	

Gleichungen, die keine gültige Lösung haben, werden als Gleichungen mit leerer Lösungsmenge bezeichnet.	Definition

Ausgangsgleichung	$3(x - 2) - 12x = 2(x + 6) - 11x$	Klammer ausrechnen	Beispiel
1. Umformung	$3x - 6 - 12x = 2x + 12 - 11x$		
	$-9x - 6 = -9x + 12$	$-9x$	
2. Umformung	$-6 = 12$ (falsche Aussage!!)	$L = \varnothing$	

Gleichungen, bei denen alle Werte der Grundmenge auch als Lösungen in Frage kommen, bezeichnet man Gleichungen mit einer Lösungsmenge gleich der Grundmenge.	Definition

Ausgangsgleichung	$3(4x + 1) + x + 3 = 6(x + 1) + 7x$	Klammer ausrechnen	Beispiel
1. Umformung	$12x + 3 + x + 3 = 6x + 6 + 7x$		
	$13x + 6 = 13x + 6$	$-13x$	
2. Umformung	(wahre Aussage!!)	$6 = 6$ $L = G = R$	

2.3. Die Ungleichung

Definition

Eine Aussage, in der neben Zahlen und Rechenzeichen einer der folgenden Ausdrücke <, >, ≤ oder ≥ vorkommt, heisst Ungleichung.

Eine Ungleichung kann eine wahre oder eine falsche Aussage sein. Eine Ungleichung ist eine wahre Aussage, wenn auf beiden Seiten Zeichen für verschiedene Zahlen stehen.

Die Wahrheitswerte einer Aussage sind wahr oder falsch.

Beispiel

Ungleichung	Wahrheitswert
6 + 2 > 4	wahr
(3 + 9) – 8 < 4 - 2	falsch

Regel

Zahlen für x, welche die Aussageform zu einer wahren Aussage machen, fasst man in der Lösungsmenge zusammen. Bei einfachen Ungleichungen findet man diese Zahlen durch Probieren.

Die Menge aller Werte, die als Lösungsmenge in Frage kommen, heisst Grundmenge.

Beispiel

2x > 50

x muss grösser als 25 sein, weil 2 mal 25 genau 50 wäre

Für die Lösungsmenge gilt: L= {x | x > 25}

Regel

Kann man die Lösungsmenge einer Ungleichung nicht sofort angeben, so wird man versuchen, diese schrittweise so umzuformen, dass sie immer einfacher wird.

Die Umformungen müssen derart sein, dass alle umgeformten Gleichungen dieselbe Lösungsmenge haben (äquivalente Umformungen).

Eine Ungleichung wird äquivalent umgeformt, wenn man auf beiden Seiten dieselbe Zahl (denselben Term) addiert oder subtrahiert.

Eine Ungleichung wird äquivalent umgeformt, wenn man auf beiden Seiten dieselbe von 0 verschiedene Zahl (denselben Term, dessen Wert nicht 0 ist) multipliziert oder dividiert.

Vorsicht:

Beim Multiplizieren oder Dividieren der Ungleichung mit einer negativen Zahl wechseln die Relationen (aus < wird > und aus > wird <)!

Beispiel

Ausgangsgleichung:	10x – 4 > 20 – 2x	L = {x | x > 2}
1. Umformung	10x – 4 + 4 > 20 – 2x + 4	L = {x | x > 2}
2. Umformung	10x + 2x > 24 – 2x + 2x	L = {x | x > 2}
3. Umformung	12x : 12 > 24 : 12	L = {x | x > 2}
4. Umformung	x > 2	L = {x | x > 2}

Ausgangsgleichung:	$10x - 4 > 20 - 2x$	$L = \{x \mid x > 2\}$
1. Umformung	$10x - 4 - 10x > 20 - 2x - 10x$	$L = \{x \mid x > 2\}$
2. Umformung	$-4 - 20 > 20 - 12x - 20$	$L = \{x \mid x > 2\}$
3. Umformung	$-24 : -12 > -12x : -12$	$L = \{x \mid x > 2\}$
	Relation kehren!!	
4. Umformung	$2 < x$	$L = \{x \mid x > 2\}$

Beispiel

2.4. Die lineare Ungleichung

Ungleichungen, die man durch Umformung auf die Form

$ax + b < 0$ oder $ax + b > 0$

bringen kann, heissen lineare Ungleichungen.

Ihre Umsetzung in eine Grafik wird in jedem Fall einen begrenzten Bereich bringen.

Die Regeln der Umformung von linearen Ungleichungen sind identisch mit denen gewöhnlicher Ungleichungen.

Definition

Aufgabe 67: Gleichungen

a) $4x + 3 = 7 + 3x$

b) $4x - 1 = 2x + 9$

c) $x/3 - 1 = 3$

d) $x/3 - 1 = x/2$

3. Gleichungssysteme

Von Gleichungssystemen spricht man, sobald mehrere Unbekannte durch mehrere Gleichungen beschrieben sind. Durch die Gleichungen sind mehrere Bedingungen für die Variablen formuliert. Die Lösung des linearen Gleichungssystems sind also alle Zahlenkombinationen, welche alle Gleichungen gleichzeitig zu einer wahren Aussage machen.

Definition

Ein Gleichungssystem ist dann eindeutig bestimmt, wenn je Unbekannte mindestens eine unabhängige Gleichung vorliegt:
Anzahl Unbekannte ≤ Anzahl Gleichungen.

Regel

Für die Lösung von Gleichungssystemen werden drei Verfahren eingesetzt:

- Gleichsetzungsverfahren
- Einsetzungsverfahren
- Additionsverfahren

Alle Verfahren finden ihre Anwendung jeweils mit zwei Gleichungen. Besteht das Gleichungssystem aus mehr als zwei Gleichungen (und damit aus mehr als zwei Unbekannten) müssen die einzelnen Verfahren wiederholt mit unterschiedlichen Gleichungspaaren angewendet werden.

3.1. Gleichsetzungsverfahren

Ausgangslage: Gesucht ist das Zahlenpaar (x; y), das beide Gleichungen gleichzeitig zu einer wahren Aussage macht.

Vorgehen: Beide Gleichungen werden in eine Form gebracht, bei der sich die einen Seiten beider Gleichungen in ihrer Form exakt entsprechen. Danach können die sich nicht in ihrer Form entsprechenden Gleichungsseiten gleichgesetzt werden.

Regel

Gleichung 1: (1) $y = 3x - 2$

Gleichung 2: (2) $y = 4x + 3$

Die gesuchte Zahl y muss sowohl durch $3x - 2$ (Gleichung 1) als auch durch $4x + 3$ (Gleichung 2) darstellbar sein. Daher muss das x so gewählt werden, dass $3x - 2 = 4x + 3$ gilt. Man kann also die rechten Seiten der beiden Gleichungen gleichsetzen, um x zu ermitteln.

$$3x - 2 = 4x + 3$$

Diese neue Gleichung wird nun nach x aufgelöst, und man erhält den in Frage kommenden x-Wert.

$3x - 2$	=	$4x + 3$	$-3x$
$3x - 2 - 3x$	=	$4x + 3 - 3x$	vereinfachen
-2	=	$x + 3$	-3
$-2 - 3$	=	$x + 3 - 3$	vereinfachen
-5	=	x	

Beispiel

Durch Einsetzen des gefundenen x-Wertes in eine der Gleichungen des Gleichungssystems erhält man dann den zu x gehörenden y-Wert.

y	=	3x – 2	–5 für x einsetzen
y	=	3 • –5 – 2	vereinfachen
y	=	–17	

L = {(–5; –17)}	Das Zahlenpaar (x; y) ist damit Lösung des Gleichungssystems

3.2. Einsetzungsverfahren

Regel

Ausgangslage:	Gesucht ist das Zahlenpaar (x; y), das beide Gleichungen gleichzeitig zu einer wahren Aussage macht.
Vorgehen:	Zunächst wird eine der beiden Gleichungen durch äquivalente Umformung nach einer Variablen aufgelöst. Danach kann in der anderen Gleichung die entsprechende Variable durch die Aussage der ersten Gleichung ersetzt werden.

Beispiel

Gleichung 1: (1) 3y – 4x = –4

Gleichung 2: (2) 2y – 6x = 4

Die gesuchte Zahl y muss sowohl durch die Gleichung 1 als auch durch die Gleichung 2 darstellbar sein. In einem ersten Schritt wird die eine Gleichung, in diesem Beispiel Gleichung 2, durch äquivalente Umformung nach y aufgelöst.

(2)	2y – 6x	=	4	+6x
(2)	2y – 6x + 6x	=	4 + 6x	vereinfachen
(2)	2y	=	4 + 6x	/2
(2)	2y / 2	=	(4 + 6x) / 2	vereinfachen
(2)	y	=	2 + 3x	

Die erhaltene Gleichung stellt den gesuchten y-Wert mit Hilfe des gesuchten x-Wertes dar. Statt y kann nun also auch 2 + 3x stehen. Dieses wird ausgenutzt, um in der Gleichung 1 die Zahl y zu ersetzen. Für y wird nun 2 + 3x eingesetzt.

Diese neue Gleichung wird nach x aufgelöst, und man erhält den in Frage kommenden x-Wert.

(1)	3y – 4x	=	–4	y ersetzen
(1)	3 • (2 + 3x) – 4x	=	–4	ausmultiplizieren
(1)	6 + 9x – 4x	=	–4	vereinfachen
(1)	6 + 5x	=	–4	–6
(1)	6 + 5x – 6	=	–4 – 6	vereinfachen
(1)	5x	=	–10	/5
(1)	5x / 5	=	–10 / 5	vereinfachen
(1)	x	=	–2	

Beispiel

Durch Einsetzen des gefundenen x-Wertes in eine der Gleichungen des Gleichungssystems erhält man den zu x gehörenden y-Wert.

Das Zahlenpaar (x; y) ist damit Lösung des Gleichungssystems.

(2)	$2y - 6x$	=	4	–2 für x einsetzen
(2)	$2y - 6 \cdot -2$	=	4	vereinfachen
(2)	$2y + 12$	=	4	–12
(2)	$2y + 12 - 12$	=	$4 - 12$	vereinfachen
(2)	$2y$	=	-8	/2
(2)	$2y / 2$	=	$-8 / 2$	Vereinfachen
(2)	y	=	-4	
	L = {(–2; –4)}			Das Zahlenpaar (x; y) ist damit Lösung des Gleichungssystems

3.3. Additionsverfahren

Ausgangslage:	Gesucht ist das Zahlenpaar (x; y), das beide Gleichungen gleichzeitig zu einer wahren Aussage macht.	Regel
Vorgehen:	Das Additionsverfahren wird so eingesetzt, dass durch das Addieren in einer eine der beiden Gleichungen eine der Variablen entfällt und eine Gleichung mit nur einer Variablen entsteht. Dazu muss man evtl. zuvor eine (oder auch beide) Gleichungen durch äquivalente Umformungen vorbereiten. Anschliessend wird addiert. Das neue Gleichungssystem enthält dann eine der alten Gleichungen und statt der zweiten Gleichung die neue, durch Addition entstandene Gleichung. Aus der Gleichung mit einer Variablen wird der erste Wert bestimmt. Durch Einsetzen in die andere Gleichung wird dann der zweite Wert berechnet und man erhält die Lösung.	

Beispiel

Gleichung 1: (1) $2x - y = 6$

Gleichung 2: (2) $6x + 2y = 8$

Die gesuchte Zahl y muss sowohl durch die Gleichung 1 als auch durch die Gleichung 2 darstellbar sein. In einem ersten Schritt wird die Gleichung 1 mit 2 erweitert, damit diese den Term –2y enthält. Dieser lässt sich danach durch Addition mit dem Term +2y der Gleichung 2 eliminieren.

(1)	$2x - y$	=	6	•2
(1)	$(2x - y) \cdot 2$	=	$6 \cdot 2$	Vereinfachen
(1)	$4x - 2y$	=	12	

Beispiel

Diese äquivalent umgeformte Gleichung 1 wird nun zur Gleichung 2 addiert.

(1)	$4x - 2y$	=	12	
(2)	$6x + 2y$	=	8	Addition
(3)	$10x$	=	20	Summe
(3)	$10x$	=	20	/10
(3)	$10x / 10$	=	20 / 10	Vereinfachen
(3)	x	=	2	

Durch Einsetzen des gefundenen x-Wertes in eine der Gleichungen des Gleichungssystems erhält man dann den zu x gehörenden y-Wert.

(1)	$4x - 2y$	=	12	2 für x einsetzen
(1)	$4 \cdot 2 - 2y$	=	12	vereinfachen
(1)	$8 - 2y$	=	12	-8
(1)	$8 - 2y - 8$	=	12 - 8	vereinfachen
(1)	$-2y$	=	4	/-2
(1)	$-2y / -2$	=	4 / -2	vereinfachen
(1)	y	=	-2	

$L = \{(2; -2)\}$ — Das Zahlenpaar (x; y) ist damit Lösung des Gleichungssystems

Das Additionsverfahren eignet sich insbesondere, wenn Gleichungssysteme mit mehr als zwei Gleichungen zu lösen sind. Dabei wird folgendes Vorgehen gewählt:

1. Als erstes muss man entscheiden, welche Variable aus welchen beiden Gleichungen entfernt werden soll.
2. Nun wird die erste Gleichung übernommen und die beiden anderen Gleichungen durch Addition der Gleichungen so umgeformt, dass eine Variable aus beiden Gleichungen verschwindet.
3. Aus den beiden Gleichungen mit zwei Variablen wird nun wiederum aus einer der beiden Gleichungen eine weitere Variable eliminiert.
4. Nun können nacheinander alle Variablen bestimmt werden:
   - Die erste Variable aus der Gleichung mit einer Variablen.
   - Die zweite Variable durch Einsetzten der berechneten Variablen in die Gleichung mit zwei Variablen.
   - Die dritte Variable durch Einsetzten der berechneten Variablen in die Gleichung mit drei Variablen.

Das Additionsverfahren kann nach diesem Muster auch für Lösen von linearen Gleichungssystemen mit 4 (5, 6 usw.) Gleichungen mit 4 (5,6 usw.) Variablen benutzt werden. Dieses Verfahren heisst „Gauss'sches Eliminationsverfahren“.

Hinweis

Aufgabe 68: Gleichungssysteme

a) Gleichsetzungsverfahren

$y = 2x - 7$

$y = -3x + 3$

b) Einsetzungsverfahren

$x = 2y + 8$

$3x - 5y = 21$

c) Additionsverfahren

$4x + 5y = -7$

$-2x + 3y = -13$

Aufgabe 69: Textaufgabe „Alter“ (1)

In drei Jahren ist der Vater vierzig Jahre alt.

Das Alter des Vaters addiert mit dem Alter des Sohnes ergibt sieben Jahre mehr als das Alter der Mutter.

Die Mutter ist halb so viele Jahre jünger als der Vater wie der Sohn in fünf Jahren alt sein wird.

Wie alt ist der Sohn heute?

Aufgabe 70: Textaufgabe „Alter“ (2)

Anja und Bettina sind Zwillinge.

Heute ist das Alter der Mutter der Zwillinge addiert mit dem Alter des Vaters der Zwillinge Anja und Bettina genau 62 Jahre.

In neun Jahren sind die Zwillinge Anja und Bettina zusammen gleich alt wie ihre Mutter heute ist.

Heute ist der Vater von Anja und Bettina neun Mal so alt wie Anja heute ist?

Wie alt ist Bettina heute?

Aufgabe 71: Textaufgabe „Zahlen und Ziffern“ (1)

Eine zweistellige Zahl hat die Quersumme von 11.

Kehrt man die Ziffern um, erhält man eine neue Zahl, welche ebenfalls die Quersumme von 11 hat, aber um 7 mehr als das doppelte der Ursprungszahl höher ist als die Ursprungszahl.

Wie lautet die Ursprungszahl?

Aufgabe 72: Textaufgabe „Zahlen und Ziffern“ (2)

Die Quersumme einer zweistelligen Zahl ist acht. Tauscht man die beiden Ziffern gegenseitig aus, entsteht eine neue Zahl, welche aber um 18 höher als die ursprüngliche Zahl ist. Wie lautet die ursprüngliche zweistellige Zahl?

Aufgabe 73: Textaufgabe „Mischverhältnisse“ (1)

Zwanzig Liter 80%-ige Schwefelsäure sollen mit 50%-iger Schwefelsäure zu 58%-iger Schwefelsäure vermischt werden. Wie viele Liter Mischung zu 58% ergibt es?

Aufgabe 74: Textaufgabe „Mischverhältnisse“ (2)

10 Liter 80%-ige Schwefelsäure soll mit 30%-iger Schwefelsäure zu 50%-iger Schwefelsäure verdünnt werden.

Wie viele Liter 30%-ige Schwefelsäure wird benötigt?

Wie viele Liter 50%-ige Schwefelsäure erhält man?

Aufgabe 75: Textaufgabe „Gefässe und Rohre“ (1)

Drei Rohre füllen ein Bassin. Alleine brauchen sie jeweils folgende Zeiten um das Bassin zu füllen:

Rohr A: 6h

Rohr B: 2h

Rohr C: 1h

Wie lange dauert es, bis das Bassin voll ist, wenn alle Rohre gleichzeitig füllen?

Aufgabe 76: Textaufgabe „Gefässe und Rohre“ (2)

3 Rohre füllen eine Wanne wie folgt:

- Rohr A benötigt alleine 3h für die Füllung
- Rohr B benötigt alleine 2h für die Füllung
- Rohr C benötigt alleine 1½h für die Füllung

Wie lange dauert es bis die Wanne voll ist, wenn alle drei Rohre laufen?

Aufgabe 77: Textaufgabe „Zeiten und Strecken“ (1)

Zwei Wanderer starten in Luzern und wandern denselben Weg Richtung Küssnacht. Der eine Wanderer startet morgens um 10:00 Uhr und spaziert mit durchschnittlich 5 Kilometer pro Stunden, der andere Wanderer startet 30 Minuten später und spaziert mit einer mittleren Geschwindigkeit von 7½ Kilometern je Stunde. Um welche Zeit hat der zweite Wanderer den ersten eingeholt?

Aufgabe 78: Textaufgabe „Zeiten und Strecken“ (2)

Zwei Wanderer spazieren von Gossau nach Heiden. Wanderer A startet 20 Minuten vor dem Wanderer B und legt 5 Kilometer je Stunde zurück. Wanderer B legt 6 Kilometer je Stunde zurück.

Wie lange ist Wanderer A unterwegs, bis er von Wanderer B eingeholt wird?

Teil V Lineare Funktionen

1. Die Funktion

1.1. Definition Funktion

Eine Funktion dient zur Beschreibung der gegenseitigen Abhängigkeit mehrerer Faktoren welche sich gegenseitig beeinflussen.

f(x,y) y = a•x + b

1.2. Begriffe

1.2.1. Abbildung oder Relation

Falls zwischen den Elementen zweier Mengen X und Y bestimmte Beziehungen bestehen, dann bezeichnet man diese als Abbildung oder auch Relation.

Es seien X und Y Mengen. Eine Abbildung f zwischen X und Y ordnet jedem Element $x \in X$ ein Element $y \in Y$ zu.

1.2.2. Definitionsbereich / Wertebereich

Die Menge X wird Definitionsbereich der Funktion genannt, die Menge Y heisst Wertebereich der Funktion.

1.3. Wertetabellen

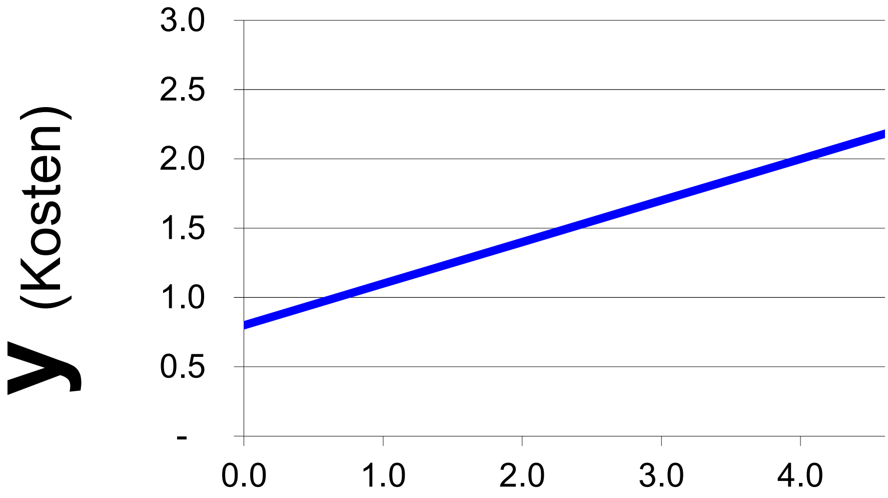
Wertetabelle am Beispiel von Telefongesprächskosten:

Je Gespräch fallen immer einmalige Gesprächskosten CHF -.80 an, egal wie lange das Gespräch dauert. Für jede Minute Gesprächsdauer fallen Gesprächskosten von CHF -.30 an.

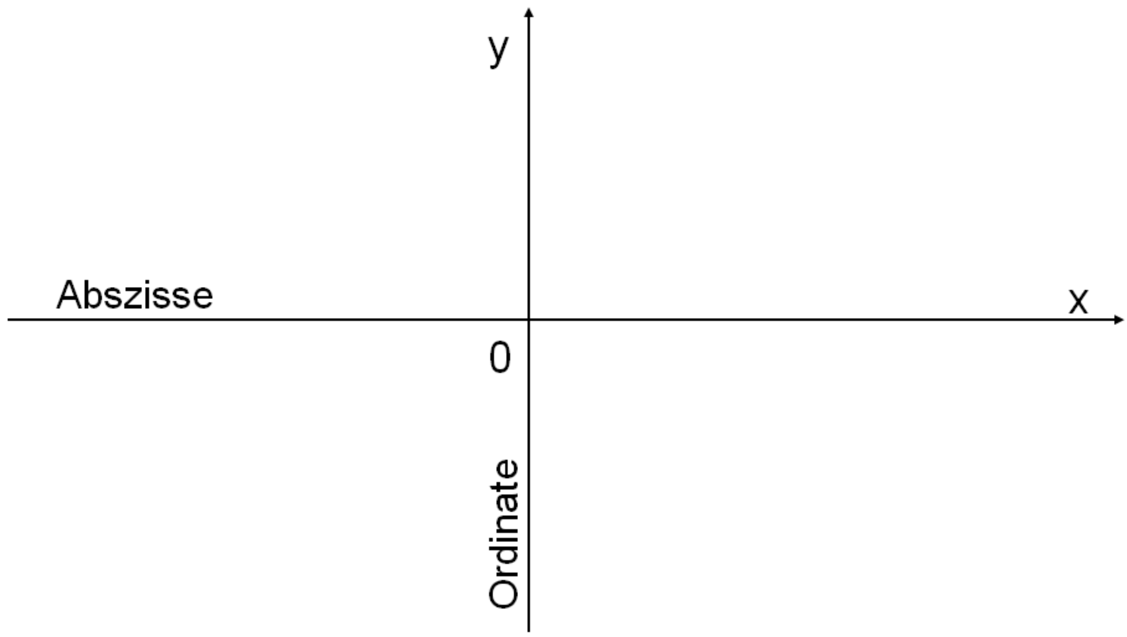
y = Gesprächskosten in CHF
x = Gesprächsdauer in Minuten

f(x,y): y = x * 0.30 + 0.80

x	y
0.0	0.8
1.0	1.1
2.0	1.4
3.0	1.7
4.0	2.0
5.0	2.3
6.0	2.6



1.4. Kartesisches Koordinatensystem



1.5. Grundform der Funktion

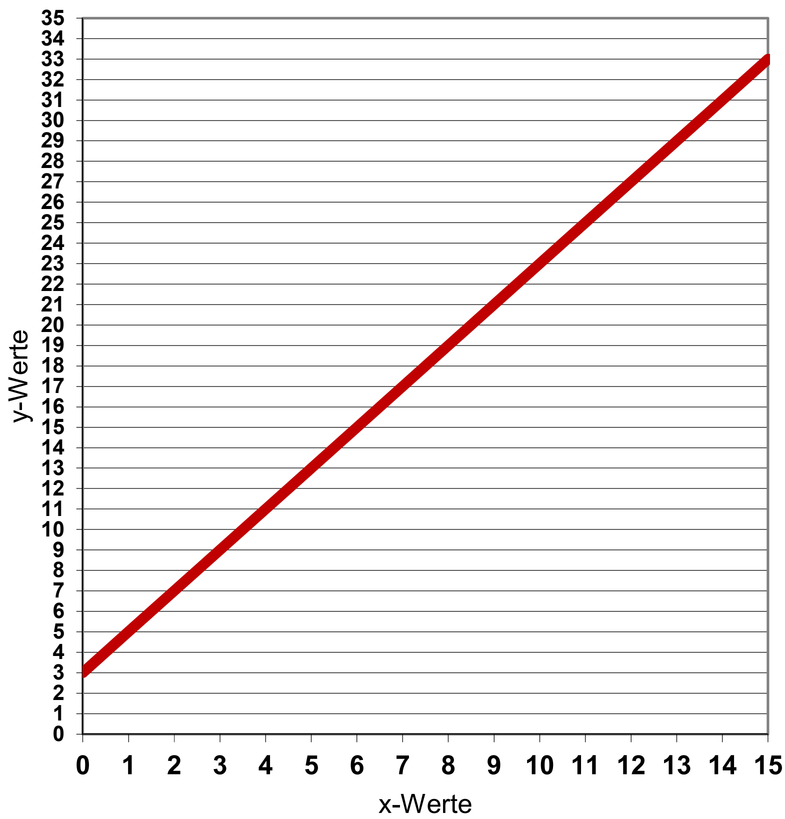
y = Steigung • x + Versatz

y = 2 • x + 3

Steigung: wie viele Schritte y pro Schritt x $\quad \text{Steigung} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

Versatz: wie viele Schritte entfernt von 0 liegt y, wenn x = 0 ist

x	y
0	3
1	5
2	7
3	9
4	11
5	13
6	15
7	17
8	19
9	21
10	23
11	25
12	27
13	29
14	31
15	33



1.6. Analyse von Funktionen

1.6.1. Ermittlung von Steigung und Versatz

Um Steigung und Versatz zu ermitteln, muss eine Funktion durch algebraische Umwandlung zuerst in die Urform **y = ax + b** gebracht werden.

<u>Beispiel:</u>

$4y - 12x + 8 = 0$	$+12x$
$4y + 8 = 12x$	-8
$4y = 12x - 8$	$/4$
$y = 3x - 2$	

Aus der Urform können Steigung und Versatz direkt ausgelesen werden:

Steigung: +3

Versatz: -2

Aufgabe 79: Steigung und Versatz

Bestimmen Sie die Steigung und den Versatz (y-Abschnitt) der folgenden Geraden:

a) $6x + 3y - 1/2 = 0$

b) $5x - 2/3\,y + 6/5 = 0$

c) $1{,}2x + 2{,}4y + 0{,}5 = 0$

1.6.2. Zeichnen von Funktionsdiagrammen im Kartesischen Koordinatensystem

Aufgabe 80: Funktionsgraphen

Zeichnen Sie die Geraden mit den folgenden Funktionen in einem Diagramm mit den Dimensionen -8, 0, +8:

a) $y = -2x + 3$

b) $y = \frac{1}{2}x + 3$

c) $y = -3$

1.6.3. Ermittlung von Funktionen aus zwei Punkten

Bei der Ermittlung einer Funktion aus zwei gegebenen Punkten kann Steigung und Versatz direkt aus den Koordinaten der beiden Punkte abgeleitet werden:

	x-Werte	**y-Werte**
Punkt A	$x_{Punkt\ A}$	$y_{Punkt\ A}$
Punkt B	$x_{Punkt\ B}$	$y_{Punkt\ B}$
Differenzen	$x_{Punkt\ A} - x_{Punkt\ B}$	$y_{Punkt\ A} - y_{Punkt\ B}$

Steigung = $(y_{Punkt\ A} - y_{Punkt\ B}) / (x_{Punkt\ A} - x_{Punkt\ B})$

Versatz = $y_{Punkt\ A} - \text{Steigung} \bullet x_{Punkt\ A}$ oder
$y_{Punkt\ B} - \text{Steigung} \bullet x_{Punkt\ B}$

Alternative Erklärung:

Bekannt sind zwei Punkte der Geraden. In einem ersten Schritt wird die Steigung der Geraden ermittelt, indem die Differenzen der beiden x-Positionen sowie die Differenzen der beiden y-Positionen der beiden Punkte zueinander in Bezug gesetzt werden.

Beispiel:

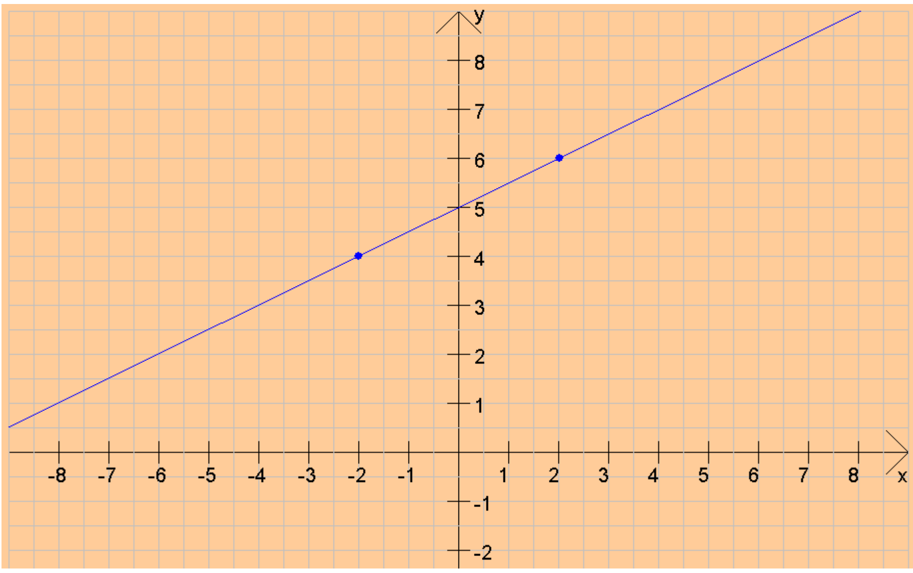
Punkt A: (x=2; y=6)
Punkt B: (x=-2; y=4)

Differenz x-Werte: 2 - (-2) = 4
Differenz y-Werte: 6 - 4 = 2

Die Steigung ist definiert ist durch $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Deshalb weist die Beispielgerade eine Steigung von $\frac{2}{4} = 0.5$ auf. Anhand dieser Steigung kann nun der y-Wert bei x=0 ermittelt und somit der Versatz bestimmt werden. Dies kann ausgehend von Punkt A oder Punkt B geschehen. Vom jeweiligen y Wert wird x * die Steigung subtrahiert:

Punkt A: Versatz = 6 - 2 * 0.5 = 5

Punkt B: Versatz = 4 - (-2) * 0.5 = 5



Aufgabe 81: Funktionsbestimmung

Gegeben sind zwei Punkte A und B. Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden, die durch diese Punkte festgelegt wird, wobei der erste Wert in der jeweiligen Klammer für x, der zweite Wert für y steht.

a) Punkte (1;-3) und (3;-1)

b) Punkte (3;7) und (-2;3)

c) Punkte (4;-3) und (2;-3)

1.6.4. Ermittlung von Funktionen aus einer Grafik

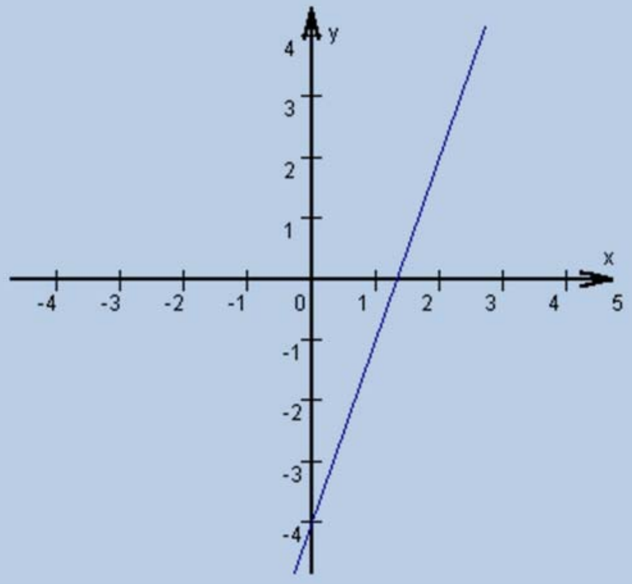
Steigung = Veränderung des y-Wertes, wenn der x-Wert um eins nach rechts verschoben wird.

Versatz = Identifikation des y-Wertes bei x=0, das entspricht dem Schnittpunkt der Geraden mit der Ordinate (y-Achse).

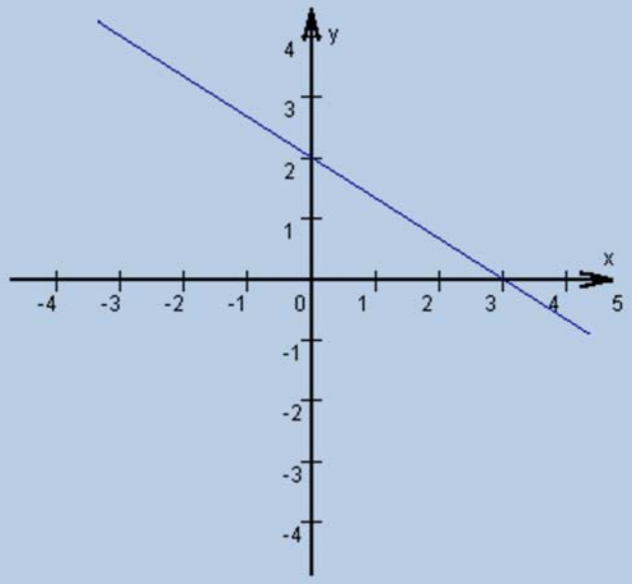
Aufgabe 82: Funktion aus Grafik

Bestimmen Sie die linearen Funktionen der folgenden Geraden:

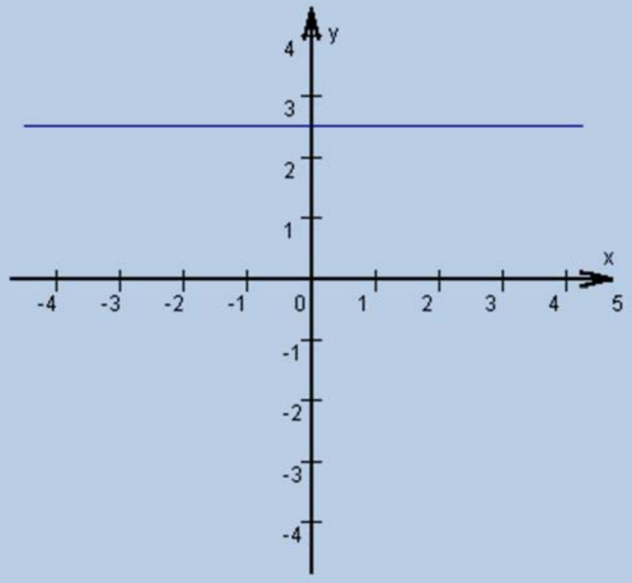
a)



i)



g)



1.6.5. Bestimmen des Schnittpunktes eines Geradepaares

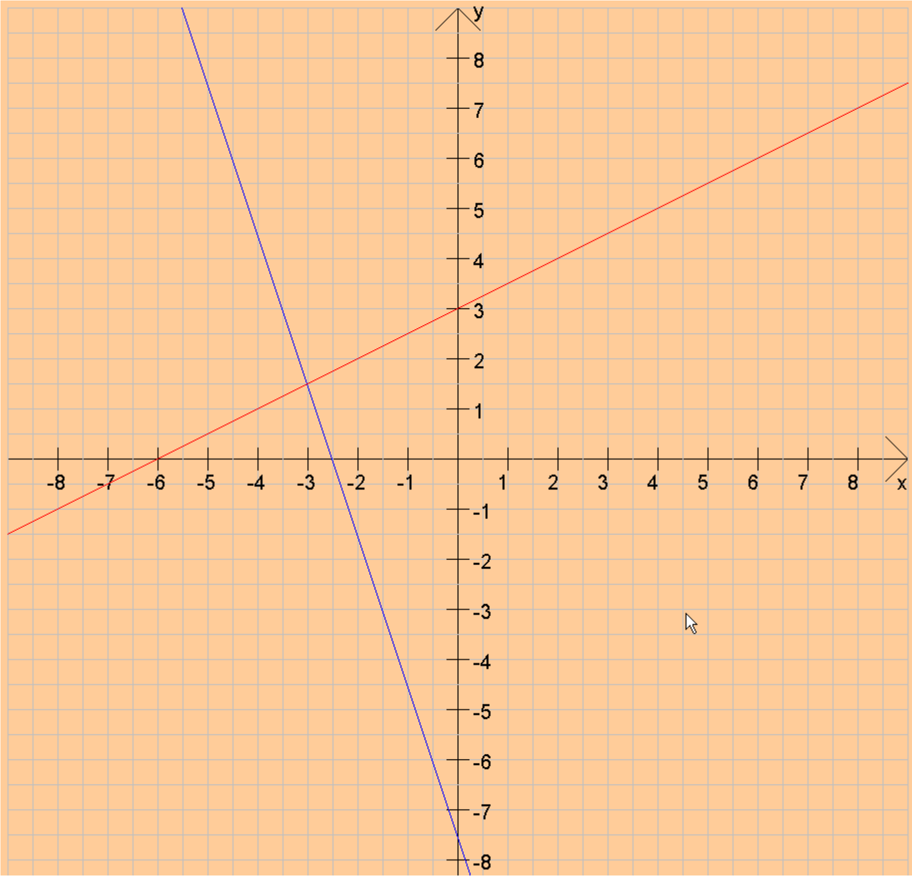
Zwei Gerade weisen exakt einen Schnittpunkt auf, sofern ihre Steigung nicht identisch ist. Ist die Steigung beider Geraden identisch aber der Wert des Versatzes unterschiedlich, verlaufen die Geraden parallel und schneiden sich nicht (bzw. erst in der Unendlichkeit). Ist Steigung und Versatz zweier Geraden identisch, liegen die beiden Geraden übereinander (deckungsgleich) und haben demzufolge unendlich viele Schnittpunkte.

Zur Ermittlung des Schnittpunktes müssen die beiden Geradegleichungen gegeneinander aufgelöst werden (zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten). Dies mit Hilfe des Addition-, Einsetzungs- oder Gleichsetzungsverfahrens (vgl. Unterlagen Vorkurs).

<u>Beispiel:</u>

Gerade A: $y = \frac{1}{2}x + 3$ *(rote Linie)*

Gerade B: $y = -3x - 7\frac{1}{2}$ *(blaue Linie)*



Anwendung des Gleichsetzungsverfahrens zur Ermittlung von x:

$$\frac{1}{2}x + 3 = -3x - 7\frac{1}{2}$$

$$3\frac{1}{2}x = -10\frac{1}{2}$$

$$x = -3$$

Nun kann in einer der Ausgangsgleichungen x durch -3 ersetzt werden, um y zu ermitteln:

$$y = \frac{1}{2} \bullet -3 + 3$$

$$y = 1\frac{1}{2}$$

Somit ist der Schnittpunkt der beiden Geraden bei x=-3 und y=1½ ermittelt.

Aufgabe 83: Schnittpunkte von Funktionen

Bestimmen Sie die Schnittpunkte der folgenden Geradepaare.

a)	$y = 3x + 4$	$y = -2x + 14$
g)	$y = \frac{1}{2}\ x + 1\frac{1}{2}$	$y = \frac{1}{2}$
d)	$y = 7x - 14$	$y = 7x - 3$

2. Anwendungsbeispiel "Optimales Produktionsprogramm"

In einem Produktionsbetrieb werden mit drei Maschinen zwei Produkte hergestellt. Die Maschinenbeanspruchung ist aus folgender Tabelle ersichtlich.

Maschinen	**Maschinenbeanspruchung in Stunden zur Erzeugung einer Einheit**		**zur Verfügung stehende Maschinenstunden pro Periode**
	Produkt A	Produkt B	
M1	45	25	1125
M2	15	50	1500
M3	100	0	1800

Um den Einsatz der Maschinen zu optimieren (optimales Produktionsprogramm) muss diejenige Produktionskombination von Erzeugnis A und Erzeugnis B gefunden werden, die den höchsten Gesamtdeckungsbeitrag ergibt.

Dazu muss der Deckungsbeitrag pro Stück festgestellt werden.

	Produkt A	**Produkt B**
Verkaufspreis in Fr./Stück	170	140
Variable Kosten pro Stück	90	80
Deckungsbeitrag I pro Stück	80	60

<u>Unbekannte Grössen:</u>

$x_A =$ Produktionsmenge Erzeugnis A

$x_B =$ Produktionsmenge Erzeugnis B

Zielfunktion:

$$\text{Bruttogewinn} = 80 \bullet x_A + 60 \bullet x_B \rightarrow \text{max!}$$

Der Bruttogewinn setzt sich aus der Anzahl der einzelnen produzierten Erzeugnissen, multipliziert mit dem jeweiligen Deckungsbeitrag pro Stück zusammen. Dieser Bruttogewinn soll maximiert werden.

<u>Kapazitätsrestriktionen:</u>

Entsprechend der oben aufgeführten Tabelle, kann für jede Maschine eine Restriktionsfunktion definiert werden.

Maschine M1: $45 \bullet x_A + 25 \bullet x_B \leq 1125$

Maschine M2: $15 \bullet x_A + 50 \bullet x_B \leq 1500$

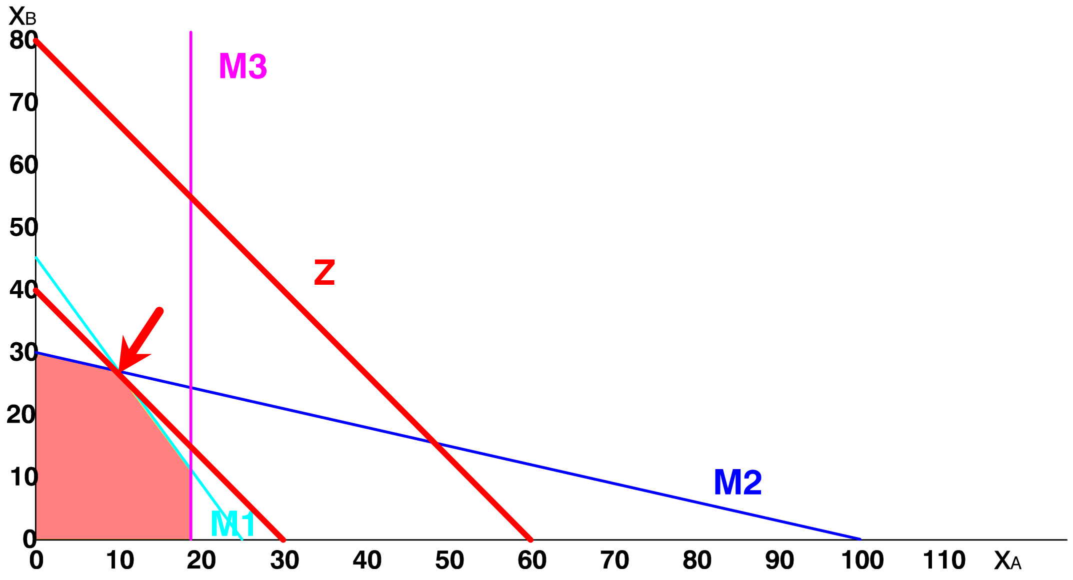
Maschine M3: $100 \bullet x_A + 0 \bullet x_B \leq 1800$

<u>Nichtnegativbedingung:</u>

$x_A \geq 0$ und $x_B \geq 0$

Es kann von keinem Erzeugnis eine negative Produktionsmenge hergestellt werden, deshalb ist bei den folgenden Betrachtungen nur der positive Bereich einzubeziehen.

Grafische Lösung:



Hinweis:

Bei mehr als zwei Produkten kann eine Lösung nicht mehr durch eine zweidimensionale grafische Darstellung gefunden werden, es muss ein mathematisches Gleichungsverfahren bei gezogen werden.

Aufgabe 84: Optimales Produktionsprogramm (1)

In einem Produktionsbetrieb werden mit vier Maschinen zwei Produkte hergestellt. Die Maschinenbeanspruchung ist aus folgender Tabelle ersichtlich.

Maschinen	**Maschinenbeanspruchung in Stunden zur Erzeugung einer Einheit**		**zur Verfügung stehende Maschinenstunden pro Periode**
	Produkt X	Produkt Y	
M1	10	8	160
M2	12	8	120
M3	9	10	180
M4	6	0	60

Deckungsbeiträge pro Stück:

	Produkt X	**Produkt Y**
Verkaufspreis in Fr./Stück	20	30
Variable Kosten pro Stück	8	20
Deckungsbeitrag pro Stück	12	10

Eruieren Sie anhand einer Grafik das optimale Produktionsprogramm!

(Wählen Sie den Wertebereich der x- und y-Achse zwischen 0 und 20 und tragen Sie „X“ auf der horizontalen und „Y“ auf der vertikalen Achse ein.)

Aufgabe 85: Optimales Produktionsprogramm (2)

In einem Produktionsbetrieb werden mit vier Maschinen zwei Produkte hergestellt. Die Maschinenbeanspruchung ist aus folgender Tabelle ersichtlich.

Maschi-nen	**Maschinenbeanspruchung in Stunden zur Erzeugung einer Einheit**		**zur Verfügung stehende Maschinenstunden pro Periode**
	Produkt U	Produkt V	
M1	50	90	1800
M2	100	100	2500
M3	50	40	1200
M4	50	60	1500

Deckungsbeiträge pro Stück:

	Produkt U	**Produkt V**
Verkaufspreis in Fr./Stück	120	80
Variable Kosten pro Stück	100	30
Deckungsbeitrag pro Stück	20	50

Stellen Sie das optimale Produktionsprogramm fest!

(Wählen Sie den Wertebereich der x- und y-Achse zwischen 0 und 40 und tragen Sie „U“ auf der horizontalen und „P“ auf der vertikalen Achse ein.)

Aufgabe 86: Optimales Produktionsprogramm (3)

In einem Produktionsbetrieb werden mit fünf Maschinen zwei Produkte hergestellt. Die Maschinenbeanspruchung ist aus folgender Tabelle ersichtlich.

Maschi-nen	**Maschinenbeanspruchung in Stunden zur Erzeugung einer Einheit**		**zur Verfügung stehende Maschinenstunden pro Periode**
	Produkt P1	Produkt P2	
M1	2	6	60
M2	1	5	40
M3	2	3	60
M4	2	5	50
M5	5	4	100

Deckungsbeiträge pro Stück:

	Produkt P1	**Produkt P2**
Verkaufspreis in Fr./Stück	18	22
Variable Kosten pro Stück	8	12
Deckungsbeitrag pro Stück	10	10

Stellen Sie das optimale Produktionsprogramm fest!

(Wählen Sie den Wertebereich der x- und y-Achse zwischen 0 und 40 und tragen Sie „P1“ auf der horizontalen und „P2“ auf der vertikalen Achse ein.)

Teil VI Exponentialfunktionen

1. Exponentielle Wachstumsfunktion

Als Beispiel für eine exponentielle Wachstumsfunktion kann die Vermehrung von Bakterien bei gezogen werden. Betrachten wir eine Bakterienkultur deren Wachstum (Zellteilung) sich wie folgt entwickelt:

In identischen Zeitintervallen von 10 Minuten verdoppelt sich die Zahl der Bakterien, wobei jedes Bakterium mit gleich bleibender Rate Nachkommen produziert, unabhängig von der Grösse der Kultur und der seit Beginn des Vermehrungsprozesses verstrichenen Zeit.

Die Menge der Bakterien in einer ursprünglichen Kultur von 7 Bakterien beträgt nach 1½ Stunden (90 Minuten) also

$$\text{Menge}_t = 7 \bullet 2^9 = 40'353'607$$

Die Formel für eine exponentielle Wachstumsfunktion lautet wie folgt:

$c = a \bullet b^t$, wobei die Variablen a, b, c und t folgende Bedeutung haben:

a = Ausgangswert zu Beginn des exponentiellen Wachstumsprozesses
b = Wachstumsfaktor
c = Resultat der exponentiellen Wachstumsfunktion
t = Anzahl Zeitintervalle des Wachstumsprozesses

In der Realität kann exponentielles Wachstum nicht bis in alle Ewigkeit weitergehen. Irgendwann stösst es an Grenzen, die den Prozess verlangsamen oder gar stoppen, und die gleichzeitig die Grenzen des Wachstums bestimmen.

<u>Beispiel:</u>

Ein Computervirus befällt ausschliesslich Dynamic Link Library[7] (.dll). Mit jedem Aufstarten des Computers infiziert jede bereits infizierte dll-Datei fünf weitere, noch nicht infizierte dll-Dateien.

Auf einem durchschnittlichen PC sind gegen 100 dll-Dateien abgelegt. Wie oft kann ein solcher PC aufgestartet werden, bis alle dll-Dateien infiziert sind, wenn erstmals eine einzige Datei vom Virus befallen ist?

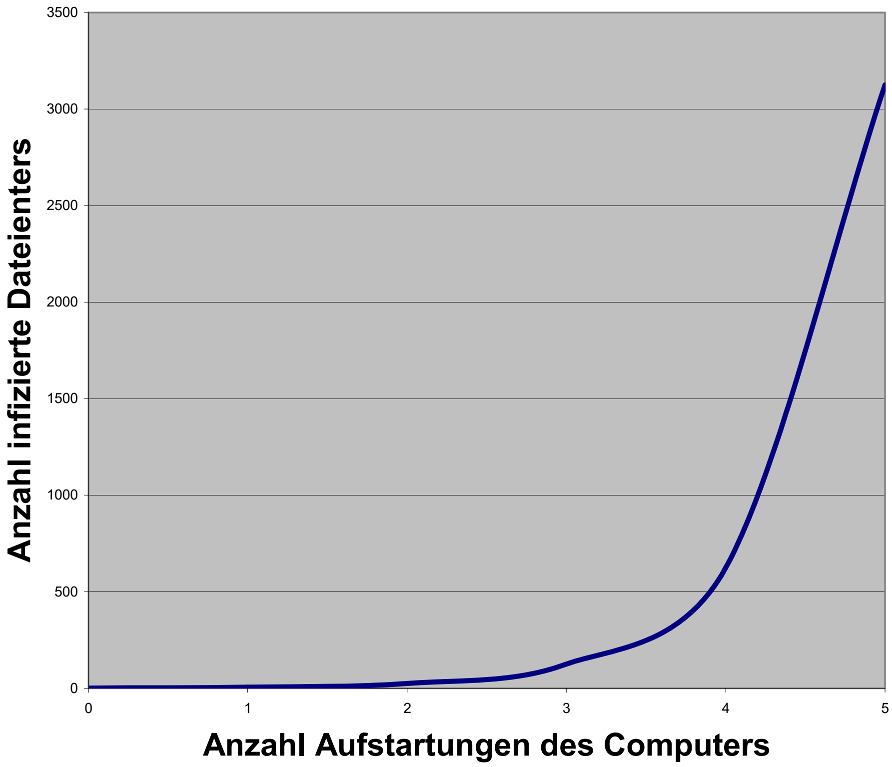
Zeitpunkt	Anzahl infizierte Dateien
0	1
1	5
2	25
3	125
4	625
5	3'125

Wie obige Tabelle zeigt, sind bereits nach dem dritten Aufstarten alle dll-Dateien infiziert!

Anzahl infizierte dll-Dateien nach dem 3. Aufstarten des Computers = $1 \bullet 5^3 = 125$ (hier ist anzumerken, dass die Grenze des Wachstums bei 100 infizierbaren Dateien liegt und somit begrenzt ist).

Grafische Abbildung der exponentiellen Wachstumsfunktion:

7 Eine Dynamic-Link Library (DLL) ist eine unter Microsoft Windows verwendete Programmbibliothek. Solche Bibliotheken haben gewöhnlich die Dateiendung DLL. Das Dateiformat für DLLs ist dasselbe wie bei Windows-Programmen (EXEs). Sowohl EXEs als auch DLLs können Programmcode (Maschinencode), Daten, und Ressourcen, in irgendeiner Kombination enthalten.



2. Exponentielle Zerfallsfunktion

Nicht nur die Zunahme, sondern auch die Abnahme einer Grösse kann auf exponentielle Weise geschehen. Betrachten wir beispielsweise einen radioaktiven Stoff in welchem eine bestimmte Anzahl Atomkerne vorhanden sind. Jeder dieser Kerne wird irgendwann "zerfallen" und damit radioaktive Strahlung aussenden. Nach dem Zerfall ist der Atomkern nicht mehr radioaktiv. Je mehr zerfallsfähige Kerne vorhanden sind, umso mehr strahlt der Stoff. Da die zerfallsfähigen Kerne nach und nach "verbraucht" werden, wird sich die Intensität der Strahlung in gleich langen Zeitintervallen um den jeweils gleichen Faktor verkleinern.

Zu Beginn beträgt die Strahlung beispielsweise 1000 Einheiten und während jeder Stunde halbiert sich ihr Wert. Wie hoch ist nun die Strahlung nach 6 Stunden?

$$\text{Strahlung}_t = 1000 \bullet \left(\tfrac{1}{2}\right)^6 = 16$$

Die Formel für eine exponentielle Zerfallsfunktion lautet analog derjenigen für exponentielle Wachstumsfunktionen:

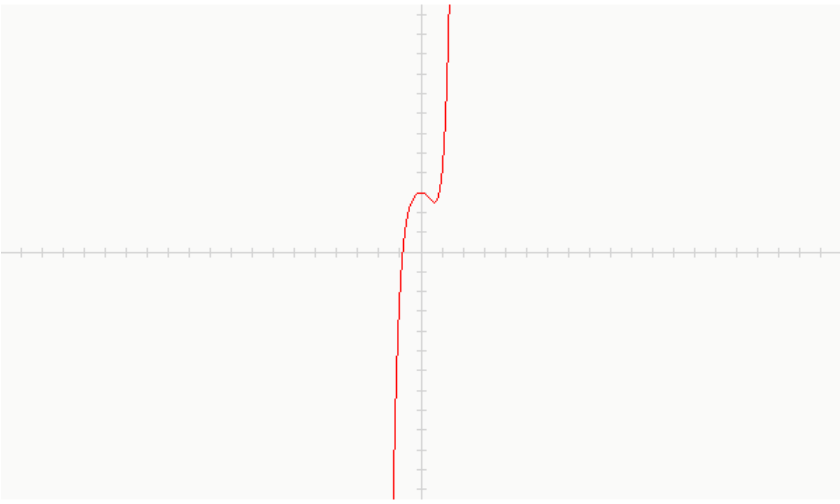
$c = a \bullet b^t$, wobei die Variablen a, c, c und t folgende Bedeutung haben:

a = Ausgangswert zu Beginn des exponentiellen Zerfallsprozesses
b = Zerfallsfaktor (<1)
c = Resultat der exponentiellen Zerfallsfunktion
t = Anzahl Zeitintervalle des Zerfallsprozesses

3. Beispiele verschiedener Exponentialfunktionen

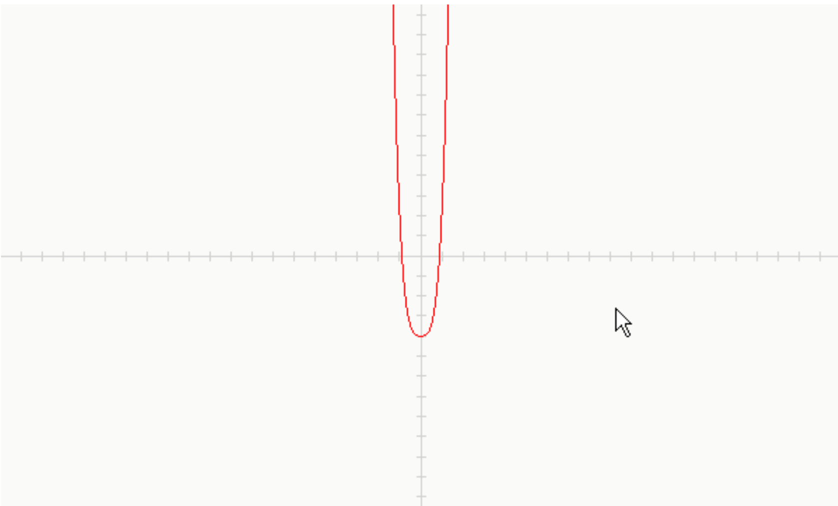
$f(x) = 3x^5 - 2x^2 + 3$

Funktionsgleichung für Wertetabelle: $y = 3x^5 - 2x^2 + 3$



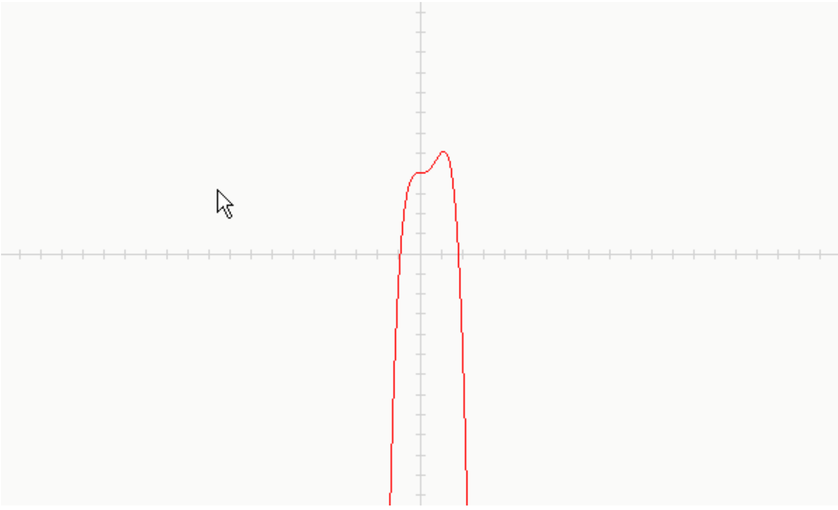
$f(x) = 5x^4 + x^2 - 4$

Funktionsgleichung für Wertetabelle: $y = 5x^4 + x^2 - 4$



$f(x) = -2x^4 + 3x^3 + 4$

Funktionsgleichung für Wertetabelle: $y = -2x^4 + 3x^3 + 4$

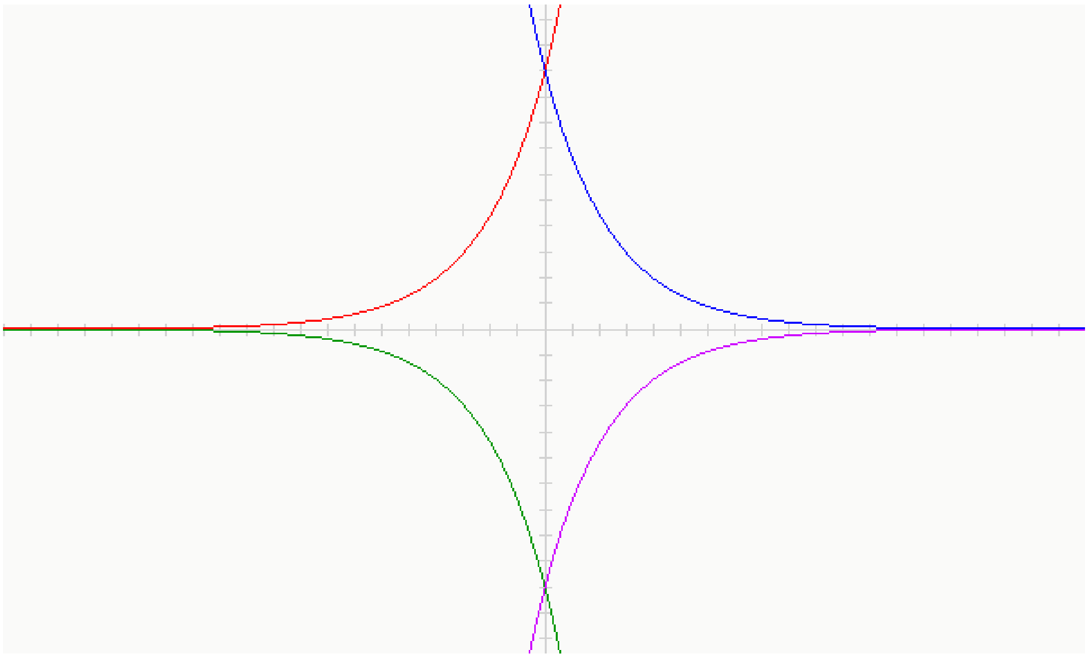


$f(x) = 10 * 1.5^x$ *(rote Kurve)* Funktionsgleichung für Wertetabelle: $y = 10 * 1.5^x$

$f(x) = -10 * 1.5^x$ *(grüne Kurve)* Funktionsgleichung für Wertetabelle: $y = 10 * 1.5^x$

$f(x) = 10 * 1.5^{-x}$ *(blaue Kurve)* Funktionsgleichung für Wertetabelle: $y = 10 * 1.5^{-x}$

$f(x) = -10 * 1.5^{-x}$ *(violette Kurve)* Funktionsgleichung für Wertetabelle: $y = -10 * 1.5^{-x}$

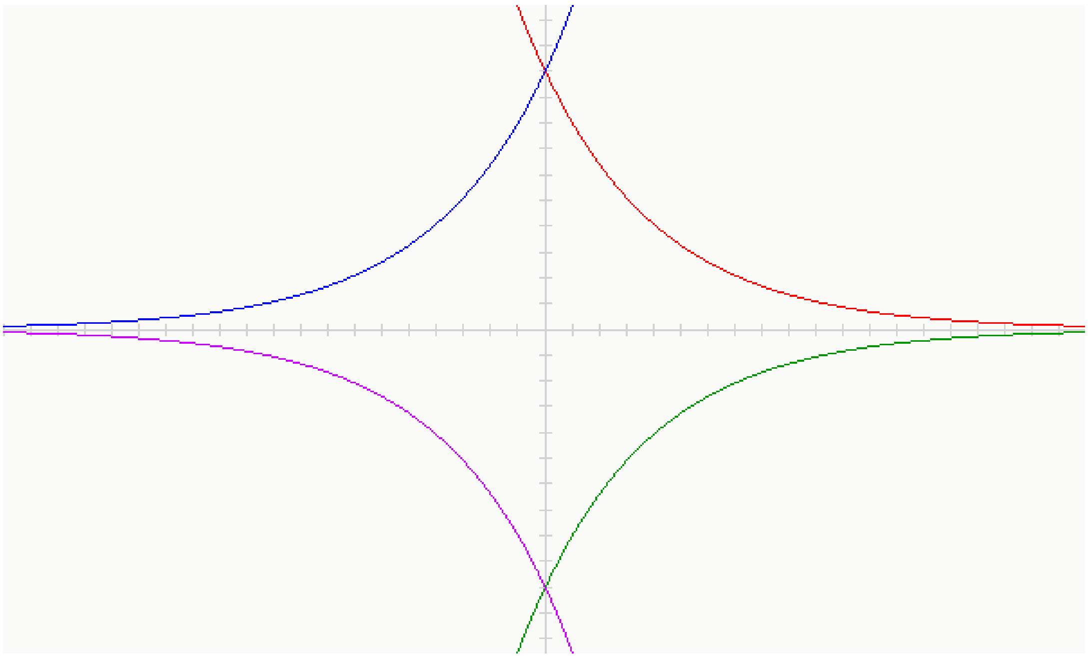


$f(x) = 10 * 0.8^x$ *(rote Kurve)* Funktionsgleichung für Wertetabelle: $y = 10 * 0.8^x$

$f(x) = -10 * 0.8^x$ *(grüne Kurve)* Funktionsgleichung für Wertetabelle: $y = 10 * 0.8^x$

$f(x) = 10 * 0.8^{-x}$ *(blaue Kurve)* Funktionsgleichung für Wertetabelle: $y = 10 * 0.8^{-x}$

$f(x) = -10 * 0.8^{-x}$ *(violette Kurve)* Funktionsgleichung für Wertetabelle: $y = -10 * 0.8^{-x}$



4. Kurvendiskussion

Aufgrund des Verlaufs einer Kurve können verschiedene spezielle Punkte identifiziert werden, welche es erlauben, eine Kurve zu interpretieren. Folgend sollen einige solche Punkte aufgezeigt werden.

4.1. Nullstellen

Die Nullstellen einer Funktion sind die Schnittpunkte des Graphen mit der x-Achse. Gesucht ist also der x-Wert, bei welchem y exakt 0 ist. Diese findet man durch Lösen der Gleichung f(x) = 0.

Beispiel:

$f(x) = x^5/300 - 11x^3/60 + 3/2x + 2$

Anhand des Graphen ist ersichtlich, dass eine Nullstelle etwa bei x = 4 liegt. Dies kann anhand der Wertetabelle nachvollzogen werden.

x-Werte	y-Werte
-7.0	-1.64
-6.0	6.68
-5.0	7.00
-4.0	4.32
-3.0	1.64
-2.0	0.36
-1.0	0.68
0.0	2.00
1.0	3.32
2.0	3.64
3.0	2.36
4.0	-0.32
5.0	-3.00
6.0	-2.68
7.0	5.64

4.2. Extrempunkte (Extrema => Maxima und Minima)

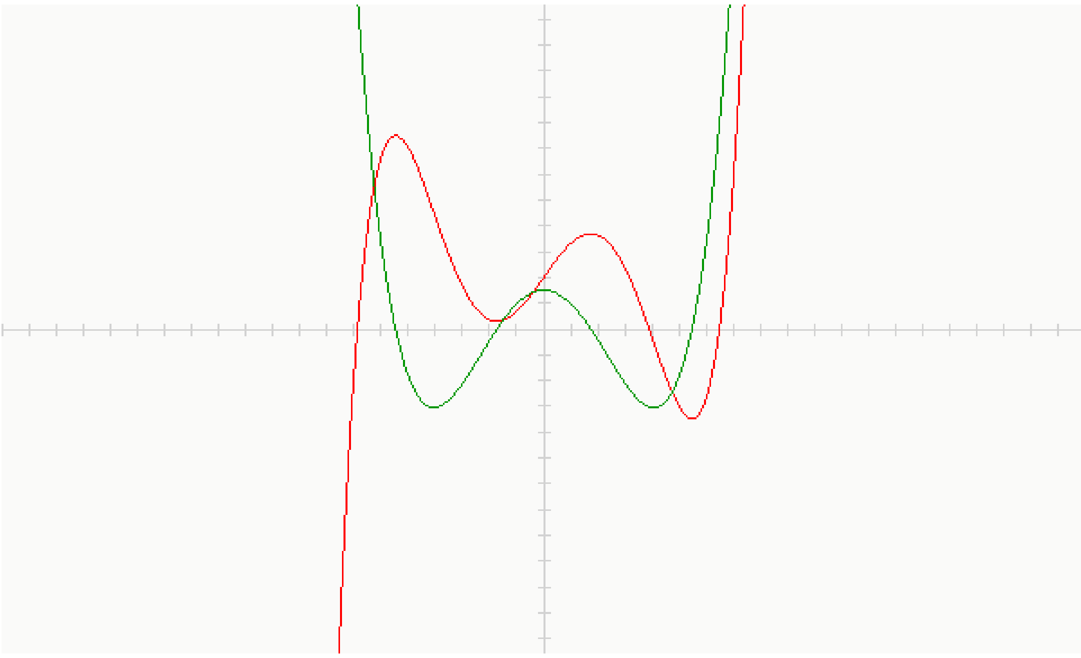
Die Funktion hat ein relatives Maximum, d.h. sie hat einen höchsten Wert an einer bestimmten Stelle x, wenn der Funktionswert an dieser Stelle grösser ist als die Funktionswerte in der unmittelbaren Umgebung. In umgekehrter Weise gilt dieses ebenso für relative Minima.

Die Extrempunkte entsprechen den Nullstellen der ersten Ableitung (siehe nächstes Kapitel "Differentialrechnung).

$$f(x) = \frac{1}{300} \bullet x^5 - \frac{11}{60} \bullet x^3 + \frac{3}{2} x + 2$$

Der vorstehende Graph zeigt vier Extrema, zwei Maxim bei etwa x = -5.5 und x = 1.8 sowie zwei Minima bei etwa x = -1.8 und x = +5.5.

Wird nun der Graph der ersten Ableitung gezeichnet (grüne Kurve), sind diese vier Extremwerte als Nullstellen ausgewiesen.



$$f(x) = \frac{1}{300} \bullet x^5 - \frac{11}{60} \bullet x^3 + \frac{3}{2}x + 2$$

$$f'(x) = \frac{1}{60} \bullet x^4 - \frac{11}{20} \bullet x^2 + \frac{3}{2}$$

x-Werte	y-Werte
-7.0	14.6
-6.0	3.3
-5.0	-1.8
-4.0	-3.0
-3.0	-2.1
-2.0	-0.4
-1.0	1.0
0.0	1.5
1.0	1.0
2.0	-0.4
3.0	-2.1
4.0	-3.0
5.0	-1.8
6.0	3.3
7.0	14.6

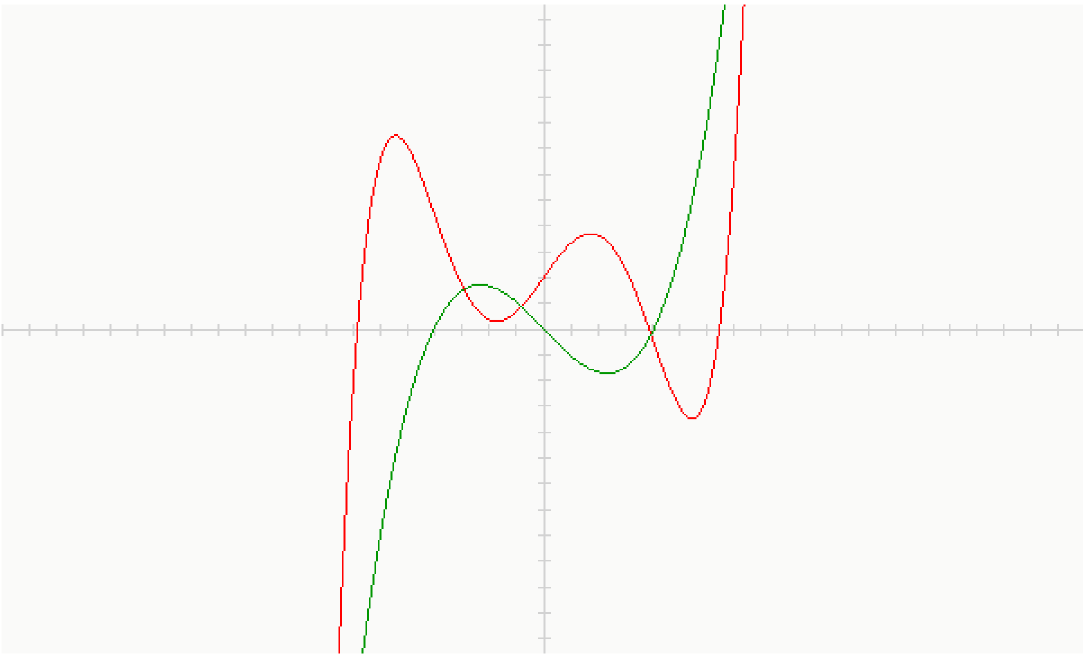
4.3. Wendepunkte

Wechselt die Steigung der Tangente an einem Punkt ihr Vorzeichen, so spricht man von einem Wendepunkt. Die Wendepunkte entsprechen den Nullstellen der zweiten Ableitung (siehe nächstes Kapitel "Differentialrechnung).

$$f(x) = \frac{1}{300} \bullet x^5 - \frac{11}{60} \bullet x^3 + \frac{3}{2}x + 2$$

Der vorstehende Graph zeigt drei Wendepunkte, einen ersten bei etwa x = -4, einen zweiten bei etwa x=0 und einen dritten bei etwa x = 4.

Wird nun der Graph der zweiten Ableitung gezeichnet (grüne Kurve), sind diese vier Wendepunkte als Nullstellen ausgewiesen.



$$f(x) = \frac{1}{300} \bullet x^5 - \frac{11}{60} \bullet x^3 + \frac{3}{2} x + 2$$

$$f'(x) = \frac{1}{60} \bullet x^4 - \frac{11}{20} \bullet x^2 + \frac{3}{2}$$

$$f''(x) = \frac{1}{15} \bullet x^3 - \frac{11}{10} \bullet x$$

5. Diskussion ausgewählter betriebswirtschaftlicher Funktionen

5.1. Geometrisch degressive Abschreibung

Die Thematik der geometrisch degressiven Abschreibung wird auf Seite **Fehler! Textmarke nicht definiert.** im Kapitel "**Fehler! Verweisquelle konnte nicht gefunden werden.**" diskutiert und soll hier nicht im Detail erläutert werden. Die Funktion zur Ermittlung des Restwertes im Jahr t bei geometrisch degressiver Abschreibung ist wie folgt definiert:

$$f(t) = I_0 \bullet \left(1 - \tfrac{2}{n}\right)^t$$

Beispiel:

I_0 (Anschaffungspreis einer Maschine) CHF 120'000.-

n (Nutzungsdauer der Maschine) 8 Jahre

Abschreibungstabelle für geometrisch degressive Abschreibung:

Jahr	Restwert	Abschreibungsbetrag
0	120'000	
1	90'000	30'000
2	67'500	22'500
3	50'625	16'875
4	37'969	12'656
5	28'477	9'492
6	21'357	7'119
7	16'018	5'339
8	12'014	4'005

Nun stellt sich die Frage, in welchem Jahr entspricht die Steigung der geometrisch degressiven Abschreibungsfunktion derjenigen der linearen Abschreibung.

Funktion der linearen Abschreibung: $f(t) = I_0 - t \bullet \frac{I_0}{n}$

Daraus lässt sich die Steigung der linearen Abschreibung ablesen: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-I_0}{n}$, was im konkreten Beispiel $-\frac{120000}{8}$ ergibt.

Abschreibungstabelle für lineare Abschreibung:

Jahr	Restwert	Abschreibungsbetrag
0	120'000	
1	105'000	15'000
2	90'000	15'000
3	75'000	15'000
4	60'000	15'000
5	45'000	15'000
6	30'000	15'000
7	15'000	15'000
8	-	15'000

Wird nun die erste Ableitung der Funktion für geometrisch degressive Ableitung gleich der Steigung der Funktion für lineare Abschreibung[8] gesetzt, ergibt sich als Ergebnis dasjenige Jahr, in welchem sich die Jahresabschreibungsbeträge beider Methoden am nächsten kommen.

$$f(t) = 120'000 \bullet \left(1 - \tfrac{2}{8}\right)^t$$

$$f(t) = 120'000 \bullet 0.75^t$$

$$f'(t) = 120'000 \bullet \ln 0.75 \bullet 0.75^t$$

$$120'000 \bullet \ln 0.75 \bullet 0.75^t = -\frac{120'000}{8}$$

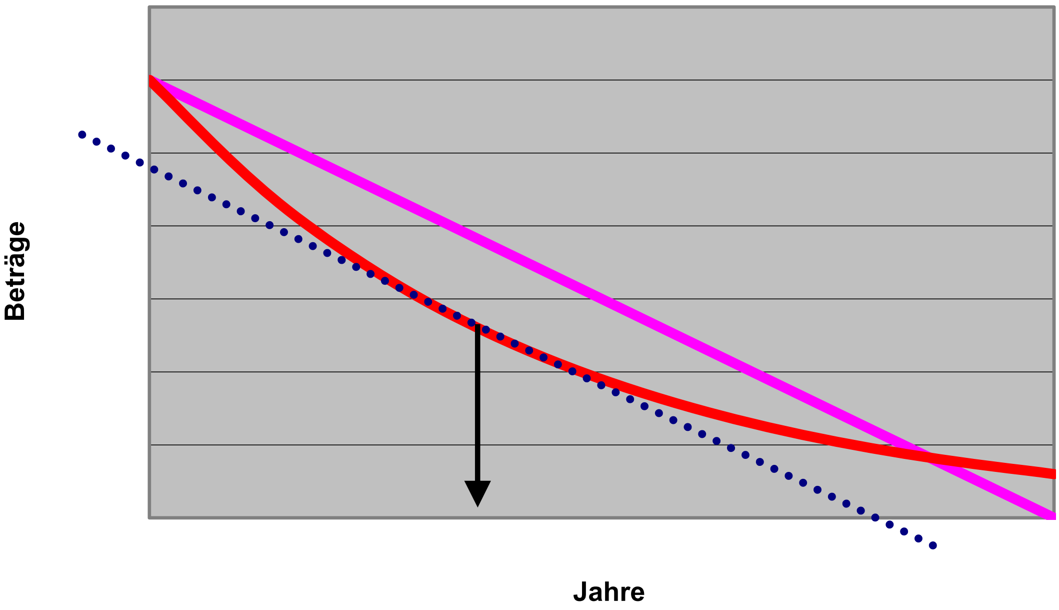
$$-34'521.85 \bullet 0.75^t = -15'000$$

$$0.75^t = 0.4345$$

$$t = \frac{\log 0.4345}{\log 0.75} = 2.898 \text{ Jahre}$$

Das heisst, das im dritten Jahr die Abschreibungsbeträge am nächsten beieinander liegen, was anhand folgender Tabelle bzw. auf der Grafik Seite 76 gezeigt werden kann:

	linear		**geometrisch degressiv**	
Jahr	**Restwert**	**Abschreibungsbetrag**	**Restwert**	**Abschreibungsbetrag**
0	120'000		120'000	
1	105'000	15'000	90'000	30'000
2	90'000	15'000	67'500	22'500
3	**75'000**	**15'000**	**50'625**	**16'875**
4	60'000	15'000	37'969	12'656
5	45'000	15'000	28'477	9'492
6	30'000	15'000	21'357	7'119
7	15'000	15'000	16'018	5'339
8	-	15'000	12'014	4'005



[8] Die Steigung der linearen Abschreibung ist negativ, da die Abschreibungsgerade gegen rechts im Koordinatensystem linear fällt.

5.2. Andler-Formel für die Ermittlung der optimalen Bestellmenge

Die Andler-Formel (nach Kurt Andler 1929), auch Losgrössenformel ist eine in der Betriebswirtschaftslehre verbreitete Formel zur Ermittlung der optimalen Bestellmenge. Die Andler-Formel ist auch unter den Namen klassische Bestellmengenformel nach Harris oder kurz Harris-Formel (nach Ford W. Harris, 1913) bekannt.

Die Formel zur Berechnung der optimalem Bestellmenge (optimale Losgrösse) setzt sich wie folgt zusammen (Voraussetzung ist ein zyklischer Materialeinkauf und ein kontinuierlicher Materialverbrauch, wodurch die Materiallagerbewegungen in Form einer Sägezahnkurve abgebildet werden können):

$\frac{x}{2}$ entspricht dem mittleren Lagerbestand

$\frac{x}{2} \bullet p$ entspricht dem mittleren Lagerwert

$\frac{x}{2} \bullet p \bullet i$ entspricht den Jahreskosten für Kapital und Lager

$\frac{M}{x}$ entspricht den Anzahl Bestellungen pro Jahr

$\frac{M}{x} \bullet a$ entspricht den gesamten bestellfixen Kosten pro Jahr

Somit berechnen sich die gesamten Lagerkosten nach folgender Formel: $\frac{x}{2} \bullet p \bullet i + \frac{M}{x} \bullet a$

Der tiefste Kostenpunkt ist beim Minimum der durch die Lagerkostenfunktion definierten Kurve gegeben. Dieser Punkt ist durch die Nullstelle der ersten Ableitung definiert:

$f(x) = \frac{x}{2} \bullet p \bullet i + \frac{M}{x} \bullet a$	ursprüngliche Lagerkostenfunktion
$f(x) = \frac{1}{2} \bullet p \bullet i \bullet x + M \bullet a \bullet \frac{1}{x}$	umgeformte Lagerkostenfunktion
$f'(x) = \frac{1}{2} \bullet p \bullet i + M \bullet a \bullet -\frac{1}{x^2}$	erste Ableitung der Lagerkostenfunktion

Auflösung der ersten Ableitung nach x:

$\frac{1}{2} \bullet p \bullet i + M \bullet a \bullet -\frac{1}{x^2} = 0$	erste Ableitung der Lagerkostenfunktion
$\frac{1}{2} \bullet p \bullet i - M \bullet a \bullet \frac{1}{x^2} = 0$	Vorzeichen im rechten Summanden auflösen
$\frac{1}{2} \bullet p \bullet i = M \bullet a \bullet \frac{1}{x^2}$	beidseitig rechten Summanden subtrahieren
$\frac{p \bullet i}{2 \bullet M \bullet a} = \frac{1}{x^2}$	beidseitig durch (M • a) dividieren
$\frac{2 \bullet M \bullet a}{p \bullet i} = x^2$	beidseitig mit -1 potenzieren (Kehrwerte)
$\sqrt{\frac{2 \bullet M \bullet a}{p \bullet i}} = x$	beidseitig Quadratwurzel ziehen

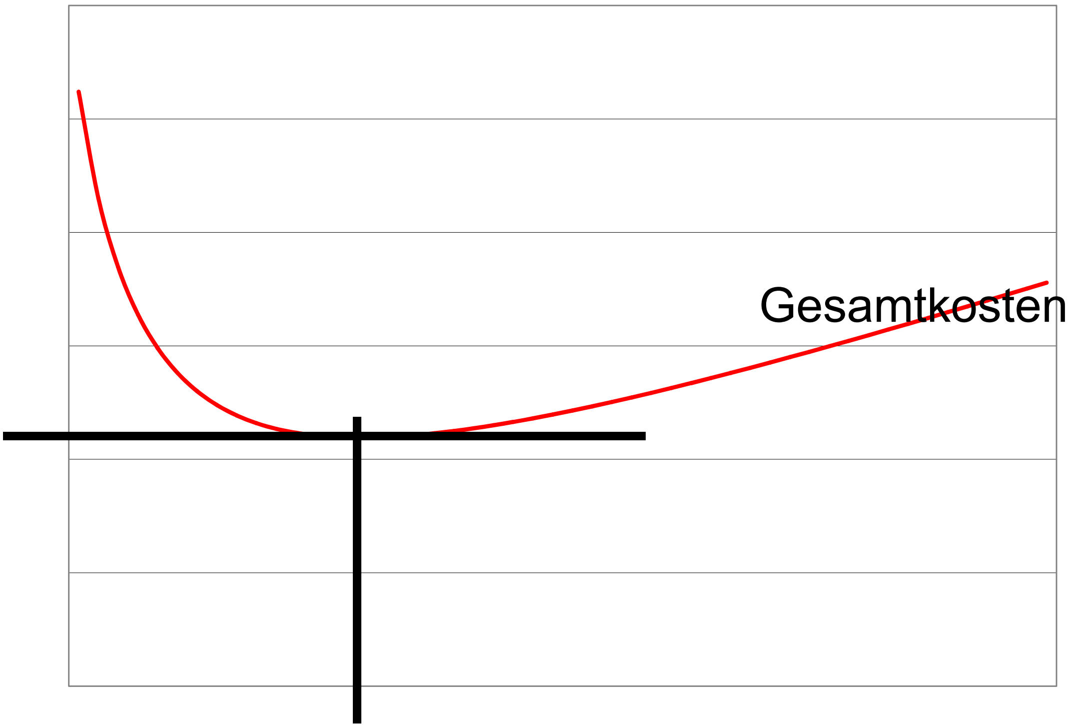
Somit ergibt die Nullsetzung der ersten Ableitung der Lagerkostenfunktion deren Minimalpunkt:

$\sqrt{\frac{2 \bullet M \bullet a}{p \bullet i}}$

M = Gesamte Bestellmenge eines Jahres
a = Fixe Kosten je Auftrag
p = Einkaufspreis je Stück
i = Zins- und Lagerkostensatz (30% => 0.3)
x = Losgrösse

<u>Beispiel:</u>

M = 5'000 Stück
a = CHF 100.-
p = CHF 3.-
i = 0.4 (40%)



Voraussetzung für die Gültigkeit obiger Formel ist allerdings der kontinuierliche Lagerabbau und der zyklische Einkauf.

$$\sqrt{\frac{2 \bullet M \bullet a}{p \bullet i}} = \sqrt{\frac{2 \bullet 5'000 \bullet 100}{3 \bullet 0.4}} = 913 \text{ Stücke}$$

Aufgabe 87: Graphen zu Exponentialfunktionen

Zeichnen Sie die Graphen zu folgenden Funktionen:

a) $y = x^2 - 2$

c) $y = x \bullet (x^2 - 9) / 12$

i) $y = 1 / (2 - x)$

Aufgabe 88: Seerosen auf einem Teich

Die Seerosen auf der Oberfläche eines Teichs vermehren sich exponentiell. Zu Beginn sind 20 Stück vorhanden. Alle 4 Tage verdreifacht sich ihre Anzahl. Im Mittel deckt eine Seerose mit ihren Blättern eine Fläche von 500cm^2 ab. Wie viele Tage dauert es, bis die ganze Teichfläche von $6'561\text{m}^2$ vollständig mit Seerosen bedeckt ist?

Aufgabe 89: Wachstumsprozess

Ein Organismus wird von 500 Viren befallen, die sich (für eine Zeit lang) exponentiell vermehren. Während jeder Stunde wächst ihre Anzahl um 20%. Wie gross ist die Zahl der Viren 5 Stunden nach der Infektion?

Aufgabe 90: Absorption

Licht, das in eine dicke Schicht aus Glas eintritt, wird in exponentieller Weise abgeschwächt. Dieser Prozess heisst Absorption. In einem konkreten Fall nehme die Intensität des Lichts pro (im Glas) zurückgelegtem Zentimeter um 5% ab. Um welchen Faktor wird die Intensität des Lichts durch eine 7 cm dicke Glasscheibe abgeschwächt?

Teil VII Finanzmathematik

1. Prozentrechnung und Zinsrechnung

1.1. Prozentrechnung (Promillerechnung)

Ein **Prozent** vom Grundwert ist der hundertste Teil des Grundwertes.

1 % (1 von Hundert) = $\frac{1}{100}$ oder 0.01 des Grundwertes

p % (p von Hundert) = $\frac{p}{100}$ oder 0.01 • p des Grundwertes

Ein Promille vom Grundwert ist der tausendste Teil des Grundwertes.

1 ‰ (1 von Tausend) = $\frac{1}{1'000}$ oder 0.001 des Grundwertes

p ‰ (p von Tausend) = $\frac{p}{1'000}$ oder 0.001 • p des Grundwertes

Definition

30% von CHF 400.-- = $\frac{30}{100} \bullet 400$ = 400 • 0.3 = 120.--

20‰ von CHF 8'000.-- = $\frac{20}{1'000} \bullet 8'000$ = 8'000 • 0.02 = 160.--

Beispiel

Folgend werde Prozentwerte nur noch in der Dezimalnotation verwendet:
10% = 0.1, 6% = 0.06 etc.

Hinweis

1.2. Marchzinsrechnung

Für die Marchzinsrechnung sind

das Kapital	k
der Zinssatz	i
die Zinsen	z
die Anlagezeit	t

massgebend.

Jede dieser vier Variablen kann aus einer gemeinsamen Zinsformel, die sich für Jahre, Monate und Tage darstellen lässt, errechnet werden.

Erklärung

Berechnung von	für 1 Jahr	für m Monate	für t Tage
Zinsertrag z [Währung]	$z = k \bullet i$	$z = \frac{k \bullet i \bullet m}{12}$	$z = \frac{k \bullet i \bullet t}{360}$
Kapital k [Währung]	$k = \frac{z}{i}$	$k = \frac{z \cdot 12}{i \bullet m}$	$k = \frac{z \bullet 360}{i \bullet t}$
Zinssatz i	$i = \frac{z}{k}$	$i = \frac{z \bullet 12}{k \bullet m}$	$i = \frac{z \bullet 360}{k \bullet t}$
Zeit t [Zeiteinheit]	$t = \frac{z}{k \bullet i}$	$m = \frac{z \bullet 12}{k \bullet i}$	$t = \frac{z \bullet 360}{k \bullet i}$

Formeln

Welche Zinsen fallen für ein Kapital von CHF 2'000.- in 6 Monaten bei einem Zinssatz von 8% an?

$z = \frac{k \cdot i \cdot t}{12}$ k = CHF 2'000.--; t = 6 Monate; i = 0.08 (=8%)

$z = \frac{2'000 \bullet 0.08 \bullet 6}{12} = 80$ = CHF 80.-

Beispiel

Aufgabe 91: Marchzinsrechnung

Ein (nachfälliges) Darlehen zu 4¼% von CHF 20'000.- mit Zinstermin 31. Mai wird am 17. November inklusive Zinsen vorzeitig zurückbezahlt. Wie hoch ist der zurückbezahlte Betrag (auf ganze Franken gerundet) inklusive anteiligen Zinsen?

Aufgabe 92: Zinssatzberechnung Marchzinsen

Wie hoch muss der Zinssatz sein, wenn ein Kapital von CHF 1'500.- nach 8 Monaten um 50% angewachsen sein soll?

Aufgabe 93: Zinssatzberechnung Anlageanteile

Ein Teil eines Kapitals von 14’700 Franken ist zu 6% angelegt, der andere zu 5%. Der Jahreszins des Kapitals beträgt 820 Franken. Wie gross sind die beiden Teile?

Aufgabe 94: Zinssatzberechnung Knacknuss

Von einem Kapital über CHF 211‘300.- ist ein Teil zu 3% verzinst, der doppelte Betrag dieses 3%-Teils wird zu 5½% verzinst und der Restbetrag wird zu 8% verzinst. Der gesamte Zins für eine Dauer von 177 Tagen beträgt CHF 5‘310.-. Wie hoch ist der Teilbetrag, welcher zu 5½% verzinst wird?

1.3. Zinseszinsrechnung

Für die Zinseszinsrechnung sind das Anfangskapital (Barwert) K_0 das Kapital nach n Jahren (Endwert) K_n der Zinsfuss in Dezimalnotation i die Anlagezeit in ganzen Jahren n massgebend.	Regel

Errechnen des **Aufzinsungsfaktors** Aufzinsungsfaktor: $r = (1+i)^n$ Der Aufzinsungsfaktor gibt den Wert eines Frankens im Jahre n an, welcher Heute zum Zinssatz von i angelegt wird unter Berücksichtigung der Wideranlage von Zinsen und Zinseszinsen während n Jahren.	Definition

Errechnen des **Abzinsungsfaktors** Abzinsungsfaktor: $v = \frac{1}{(1+i)^n}$ Der Abzinsungsfaktor gibt den heutigen Betrag in Frankens an, welcher während n Jahren zum Zinssatz von i unter Berücksichtigung der Wideranlage von Zinsen und Zinseszinsen nach n Jahren genau einen Franken ergibt.	Definition

Endwert: $K_n = K_0 \bullet r$ Barwert $K_0 = K_n \bullet v$	Regel

Formeln

Berechnung von	
Barwert $\mathbf{K_0}$ [Währung]	$K_0 = K_n\left(\frac{1}{1+i}\right)^n$
Endwert $\mathbf{K_n}$ [Währung]	$K_n = K_0(1+i)^n$
Zinssatz **i**	$i = \left(\frac{K_n}{K_0}\right)^{\frac{1}{n}} - 1$
Zeit **n** [Jahre]	$n = \frac{\log\left(\frac{K_n}{K_0}\right)}{\log(1+i)}$

Ein Kapital von CHF 2'000.- wird zu einem Zins von 2,7% angelegt. Welcher Betrag wird nach 36 Monaten auf dem Konto sein? $K_n = K_0 \bullet (1+i)^n = 2'000 \cdot (1+0.027)^3 = 2'166.41$	Beispiel

1.4. Annuität

Eine Annuität (oder Rente) ist eine jährlich gleich bleibende Summe, welche bezahlt und verzinst wird. Die Zahlungen können zu Beginn des Jahres erfolgen (vorschüssig) oder am Jahresenden (nachschüssig).

Für die Annuitätenrechnung sind

das Anfangskapital (Barwert)	K_0
das Endkapital, Kapital nach n Jahren (Endwert)	K_n
der Zinsfuss (in Dezimalnotation)	i
die Laufzeit in Jahren	n
die jährliche vorschüssige Zahlung	A_{vor}
die jährliche nachschüssige Zahlung	A_{nach}
der vorschüssige Rentenbarwertfaktor	RBF_{vor}
der nachschüssige Rentenbarwertfaktor	RBF_{nach}

Definition

vorschüssiger Rentenbarwertfaktor:	$RBF_{vor} = 1 + \frac{(1+i)^{n-1} - 1}{(1+i)^{n-1} \bullet i}$
nachschüssiger Rentenbarwertfaktor:	$RBF_{nach} = \frac{(1+i)^{n} - 1}{(1+i)^{n} \bullet i}$
vorschüssige Annuität:	$A_{vor} = \frac{K_0}{RBF_{vor}}$
nachschüssige Annuität:	$A_{nach} = \frac{K_0}{RBF_{nach}}$
Anfangskapital bei vorschüssiger Annuität	$K_0 = A_{vor} \bullet RBF_{vor}$
Anfangskapital bei nachschüssiger Annuität	$K_0 = A_{nach} \bullet RBF_{nach}$
Endkapital bei vorschüssiger Annuität	$A_{vor} \bullet RBF_{vor} \bullet (1+i)^n$
Endkapital bei nachschüssiger Annuität	$A_{nach} \bullet RBF_{nach} \bullet (1+i)^n$

Formeln

Ein Betrag von CHF 100'000.- wird in eine 5-jährige Rente zum Zinssatz von 4% umgewandelt. Berechnen Sie die Rente vor- und nachschüssig.

<u>vorschüssig:</u>

$$RBF_{vor} = 1 + \frac{(1.04)^4 - 1}{(1.04)^4 \bullet 0.04} = 4.6299 \qquad A_{vor} = \frac{100'000}{4.6299} = 21'598.76$$

<u>nachschüssig:</u>

$$RBF_{nach} = \frac{(1.04)^5 - 1}{(1.04)^5 \bullet 0.04} = 4.4518 \qquad A_{nach} = \frac{100'000}{4.4518} = 22'462.71$$

Beispiel

Aufgabe 95: Berechnung Endkapital

Berechnen Sie das Endkapital einer Anlage von CHF 61'000.- nach 5 Jahren bei einem Zinssatz von 5¾% auf fünf Rappen genau.

Aufgabe 96: Berechnung Jahreszinssatz

Sie möchten einen Betrag über 40 Jahre fest anlegen, sodass sich dieser Betrag vervierfacht. Wie hoch ist Ihr erzielter Jahreszinssatz? Ergebnis auf Promille genau.

Aufgabe 97: Berechnung Anlagedauer

Wie lange muss ein Betrag von CHF 400.- zu 4% angelegt werden, bis sich der Betrag verdoppelt hat?

2. Marchzinsrechnung

Aufgabe 98: Nachfälliges Darlehen (I)

Ein (nachfälliges) Darlehen zu 6½% von CHF 8'000.- mit Zinstermin 30. November wird am 12. Mai inklusive Zinsen vorzeitig zurückbezahlt. Wie hoch ist der zurückbezahlte Betrag (auf ganze Franken gerundet) inklusive anteiligen Zinsen?

Aufgabe 99: Nachfälliges Darlehen (II)

Ein (nachfälliges) Darlehen zu 4¼% von CHF 20'000.- mit Zinstermin 31. Mai wird am 17. November inklusive Zinsen vorzeitig zurückbezahlt. Wie hoch ist der zurückbezahlte Betrag (auf ganze Franken gerundet) inklusive anteiligen Zinsen?

Aufgabe 100: Nachfälliges Darlehen (III)

Berechnen Sie den Marchzins 2004 auf Verfall eines 8½%-Darlehens über CHF 28’500.-, welches am 15. Oktober 2004 fällig ist. Ergebnis auf 5 Rappen gerundet.

Hinweis: Darlehenszinsen fallen immer nachfällig an.

Aufgabe 101: Anlagedauer

Wie lange muss ein Betrag von CHF 357.- zu 4% angelegt werden, bis der Zinsertrag die Höhe von CHF 11.90 erreicht?

Aufgabe 102: Zinssatz

Wie hoch muss der Zinssatz sein, wenn ein Kapital von CHF 1'500.- nach 8 Monaten um 50% angewachsen sein soll?

Aufgabe 103: Kapitaleinsatz

Welches Kapital bringt nach 10 Monaten bei einem Zinssatz von 23‰ einen Zins von CHF 258.75?

Aufgabe 104: Zinsertrag

Welchen Zins wirft ein Kapital von CHF 23'000.- bei einem Zinssatz von 125‰ in der Zeit von Anfang April bis Ende August ab? Hinweis: rechnen Sie mit Zinsmonaten zu je 30 Tagen.

Aufgabe 105: Nachfälliges Darlehen (IV)

Ein (nachfälliges) Darlehen zu 5¼% von CHF 280'000.- mit Zinstermin 30. November wird am 7. September inklusive Zinsen vorzeitig zurückbezahlt. Wie hoch ist der zurückbezahlte Betrag (auf ganze Franken gerundet) inklusive anteiligen Zinsen (ohne Berücksichtigung von Verrechnungssteuer und Spesen)?

Aufgabe 106: Anlagevarianten

Ein Teil eines Kapitals von 14’700 Franken ist zu 6% angelegt, der andere zu 5%. Der Jahreszins des Kapitals beträgt 820 Franken. Wie gross sind die beiden Teile?

3. Zinseszinsrechnung

Aufgabe 107: Zinseszinsen (I)

Berechnen Sie das Endkapital einer Anlage von CHF 61'000.- nach 5 Jahren bei einem Zinssatz von 5¾% auf fünf Rappen genau.

Aufgabe 108: Jahreszinssatz

Sie möchten einen Betrag über 40 Jahre fest anlegen, sodass sich dieser Betrag vervierfacht. Wie hoch ist Ihr erzielter Jahreszinssatz? Ergebnis auf Promille genau.

Aufgabe 109: Anlagebetrag

Welchen Betrag in CHF müssten Sie heute anlegen, um in 4 Jahren bei einem Zinssatz von 5¼% ein Kapital von CHF 10’000.- anzusparen.

Aufgabe 110: Anlagedauer

Wie lange muss ein Betrag von CHF 400.- zu 4% angelegt werden, bis sich der Betrag verdoppelt hat?

Aufgabe 111: Zinseszinsen (II)

a) Wie hoch muss der Zinssatz sein, wenn sich ein Kapital von CHF 1'500.- nach 10 Jahren verdreifacht haben soll?

b) Überprüfen Sie das Resultat der Teilaufgabe a) indem Sie mit dem errechneten Zinssatz und dem Ausgangskapital den Endwert nach 10 Jahren berechnen.

Aufgabe 112: Zinseszinsen (III)

Ein 39 jähriger Mann möchte wissen, welchen Betrag er an seinem 40. Geburtstag auf ein Konto einzahlen muss, damit er zu seiner Pension mit 65 Jahren den Betrag von CHF 50'000.- ausbezahlt erhält. Er geht davon aus, dass der Zinssatz in dieser Zeit konstant bei 5.4% sein wird.

4. Annuität

Aufgabe 113: Endwerte

a) Welchen Endwert hat ein Sparplan[9] über 4 Jahre bei vorschüssigen Zahlungen von jährlich CHF 200.- und einem Zinssatz von 4%, wenn kein Anfangskapital vorhanden ist?

b) Welchen Endwert hat derselbe Sparplan (aus Teilaufgabe a), wenn zu Beginn ein Kapital von CHF 500.- vorhanden war?

c) Welchen Endwert hat derselbe Sparplan (aus Teilaufgabe a), wenn die Zahlungen nachschüssig erfolgen

d) Welchen Endwert hat derselbe Sparplan (aus Teilaufgabe a), wenn die Zahlungen nachschüssig erfolgen und zu Beginn ein Kapital von CHF 500.- vorhanden war?

Aufgabe 114: Rentenkapital

a) Welchen Endwert hat ein Rentenkapital von CHF 10'000.--, angelegt zu 4%, wenn über 4 Jahre jedes Jahr vorschüssig ein Betrag von CHF 500.- bezogen wird?

b) Dieselbe Ausgangslage wie bei Teilaufgabe a) aber nachschüssige Renten.

[9] Unter einem Sparplan wird eine vertraglich gergelte Vereinbarung verstanden, welche den Sparer verpflichtet, über eine gewisse Zeitspanne nominell konstante Beträge in regelmässigen Zyklen auf ein Sparkonto einer Bank einzuzahlen.

Teil VIII Kombinatorik und Wahrscheinlichkeitsrechnung

1. Einführung

1.1. Wahrscheinlichkeit

Schon in der Antike tritt der Gedanke auf, dass die Naturgesetze durch eine sehr grosse Anzahl von zufälligen Ereignissen zur Geltung kommen. Die Aufdeckung der Gesetzmässigkeiten, auf deren Auftreten zahlreiche individuelle Einflüsse einwirken, die nicht oder fast nicht miteinander verbunden sind, war auch Ziel der Gelehrten, die die Wahrscheinlichkeitsrechnung wesentlich beeinflussten. Vor allem die mit Glücksspielen zusammenhängenden Probleme bildeten den Anlass dafür, dass sich bedeutende Gelehrte mit Fragen der Zufälligkeit von Ereignissen beschäftigten.

Fragestellung:

- Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, eine „6“ zu würfeln?

oder

- Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, „6 Richtige“ im Lotto zu tippen?

Die Wahrscheinlichkeit ist das Verhältnis der Anzahl günstiger Ausgänge in Bezug auf die Anzahl möglicher Ausgänge:

$$\text{Wahrscheinlichkeit} = \frac{\text{Anzahl der günstigen Ausgänge}}{\text{Anzahl der möglichen Ausgänge}}$$

Um die Wahrscheinlichkeit zu ermitteln, müssen die Anzahl Ausgänge (günstig bzw. möglich) ermittelt werden. Dazu kann das Instrument der Kombinatorik zugezogen werden.

2. Kombinatorik

In vielen Bereichen des täglichen Lebens sind wir mit Fragestellungen konfrontiert, bei denen die Anzahl denkbarer Anordnungen, Wertekombinationen, Gruppenbildungen usw. eine Rolle spielt. Beispiele hierfür sind:

- Wie viele unterschiedliche Kombinationen von 6 aus 49 Zahlen können gebildet werden?
- In wie vielen Reihenfolgen können vier Sprinter zu einer 4 x 100m-Staffel zusammengestellt werden?
- Man möchte sechs verschiedene Städte auf einer Urlaubsreise besuchen. Wie viele mögliche Reihenfolgen gibt es?
- Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass beim Roulettespiel zehnmal hintereinander Rouge gewinnt?

Gemeinsam ist diesen Fragestellungen, dass in allen Fällen bestimmte Elemente in verschiedenen Kombinationen zusammengestellt und abgezählt werden. Das Gebiet, das sich mit der Lösung derartiger Aufgaben befasst, wird daher als Kombinatorik bezeichnet. Es bildet eine wichtige Grundlage zur Lösung vieler Probleme der Wahrscheinlichkeitstheorie, der Statistik oder des Operations Research.

Im Folgenden werden drei Klassen von kombinatorischen Fragestellungen behandelt:

- **Permutationen**, die Bildung von unterscheidbaren
- **Variationen**, die Auswahl verschiedener Elemente, wobei es auf die Reihenfolge der Ziehung ankommt
- **Kombinationen**, die Ziehung verschiedener Elemente ohne Berücksichtigung der Reihenfolge.

3. Permutation

Verschiedene Möglichkeiten der Anordnung (Reihenfolgen) von Elementen werden als Permutationen bezeichnet. Eine Anordnung von n Elementen in einer bestimmten Reihenfolge heisst Permutation.

Die definierende Eigenschaft einer Permutation ist die Reihenfolge, in der die Elemente angeordnet werden. Man muss den Fall, dass alle n Elemente unterscheidbar sind, von dem Fall, dass unter den n Elementen m Elemente identisch sind, unterscheiden. Dies wird durch die Differenzierung ohne und mit Wiederholung ausgedrückt.

3.1. Permutation ohne Wiederholung

Alle n Elemente sind eindeutig identifizierbar. Um zu bestimmen, wie viele Anordnungen möglich sind, entwickeln wir den Entscheidungsbaum. Für das erste Element kommt jeder denkbare Platz in der Reihenfolge in Betracht, so dass es hier n Platzierungsmöglichkeiten gibt. Ein Platz ist beim zweiten Element in jedem Fall besetzt; es sind jetzt also nur noch n -1 verschiedene Positionen denkbar, usw. Jede Anordnung ist mit jeder anderen kombinierbar, d.h. jeder Knoten eines Astes ist mit jedem Knoten des nächsten Astes verbindbar, so dass insgesamt

$n * (n-1) * (n-2) * \ldots * 2 * 1$

Permutationen entstehen.

Die Zahl der Permutationen von n unterscheidbaren Elementen

$P(n) = 1*2* \ldots * (n-1) * n = n!$ (Fakultät n)

Beispiele:

Vier Sprinter können in P(4)=4! =24 verschiedenen Anordnungen in einer Staffel laufen.

Der Handelsvertreter, der 13 Orte zu besuchen hat, und unter allen denkbaren Rundreisen die kürzeste sucht, steht vor der wahrhaft nicht beneidenswerten Aufgabe, unter den P(13)= 13!= 6'227'020'800 verschiedenen Rundreisen diejenige mit der kürzesten Entfernung finden zu müssen. Glücklicherweise sind in der Wirklichkeit nie 13 solcher Orte untereinander direkt verbunden.

3.2. Permutation mit Wiederholung

Es seien m Elemente aus insgesamt n Elementen nicht voneinander zu unterscheiden. Offenbar sind diese m Elemente auf ihren Plätzen jeweils vertauschbar, ohne dass sich dadurch neue Reihenfolgen ergeben.

Da auf diese Weise genau m * (m-1) * … * 2 * 1 = m! Lösungen identisch sind, d.h. alle Permutationen der m nicht unterscheidbaren Elemente, bleiben insgesamt

$$\frac{n \bullet (n-1) \bullet \ldots \bullet 2 \bullet 1}{m \bullet (m-1) \bullet \ldots \bullet 2 \bullet 1}$$

verschiedene Permutationen übrig.

Die Zahl der Permutationen von n Elementen, unter denen m Elemente identisch sind, beträgt:

$$P(n) = \frac{n!}{m!}$$

Beispiel: Wie viele verschiedene zehnstellige Zahlen lassen sich aus den Ziffern der Zahl 7'844'673’727 bilden?

In der Zahl treten die Ziffer 7 viermal und die Ziffer 4 doppelt auf; die übrigen Ziffern sind 8, 6, 3 und 2, die je einmal vorkommen. Die Permutationen der vier „7“ und der zwei „4“ sind nicht unterscheidbar, so dass insgesamt

$$P(10)=\frac{10!}{4!\bullet 2!}=75'600$$

Zahlen gebildet werden können.

Aufgabe 115: Permutation mit Wiederholung

3 blaue, 2 rote und 4 grüne Kugeln gegeben. Auf wie viele verschiedene Arten lassen sich diese 9 Kugeln linear nebeneinander anordnen? 

4. Variation

Eine Auswahl von m Elementen aus n Elementen unter Berücksichtigung der Reihenfolge heisst Variation.

Wenn das gezogene Element wiederholt ausgewählt werden kann, bei einer Ziehung also zurückgelegt wird, spricht man von einer Variation mit Wiederholung, im anderen Fall heisst sie ohne Wiederholung.

4.1. Variation ohne Wiederholung

Bei der Variation ohne Wiederholung darf jedes Element nur einmal auftreten. Für die erste Position der Reihenfolge kommen alle Elemente in Frage, so dass insgesamt n Anordnungen im Entscheidungsgraph denkbar sind. Es bleiben n -1 Elemente an der zweiten Stelle und schliesslich noch n - m + 1 Elemente für die letzte Stelle.

Alle benachbarten Elemente können verbunden werden, woraus insgesamt

N * (n-1) * … * (n-m+ 1)

verschiedene Reihenfolgen entstehen.

Erweitert man das Produkt um die Faktoren 1 * 2 * … * (n - m), so erhält

man die sehr übersichtliche Formel welche die Zahl der Variationen von m Elementen aus n Elementen ohne Wiederholung zeigt:

$$V(m,n)=\frac{n!}{(n-m)!}=\frac{1\bullet 2\bullet \ldots \bullet (n-1)\bullet n}{1\bullet 2\bullet \ldots \bullet (n-m-1)\bullet (n-m)}$$

<u>Beispiel:</u>

Der Handelsvertreter kann am ersten Tag nur drei der 13 Orte besuchen. Wie viele Möglichkeiten verschiedener Routenwahlen für den ersten Tag bieten sich ihm?

Bei einer Auswahl von drei Orten aus den insgesamt 13 Orten unter Berücksichtigung der Reihenfolge ergeben sich

$$V(3,13)=\frac{13!}{10!}=11\bullet 12\bullet 13=1'716$$

Reisemöglichkeiten.

4.2. Variation mit Wiederholung

Ein Element darf wiederholt, d. h. bis maximal m-mal, auftreten. Beim ersten Element besteht die Auswahl aus n Elementen. Da das erste Element auch als zweites zugelassen ist, besteht für letzteres wieder die Auswahl aus n Elementen, so dass der Entscheidungsgraph die folgende Form annimmt.

Die Zahl der Variationen von m Elementen aus n Elementen mit Wiederholung beträgt:

$$V(m,n)=n^m$$

Beispiele:

Im Dezimalsystem werden zur Zahlendarstellung die zehn Ziffern 0, 1, ...,9 benutzt. Wie viele vierstellige Zahlen sind darstellbar?

Es können 4 Ziffern zur Zahlendarstellung variiert werden, wobei Wiederholungen (z.B. 5599) gestattet sind. Somit sind

$17(4,10)=10^4= 10'000$

Zahlen darstellbar. Das sind natürlich die Zahlen von 0000 bis 9999.

Wie viele vierstellige Zahlen sind im Dualsystem mit den zwei Ziffern 0, 1 und im Sedezimalsystem mit den sechzehn Ziffern 0,1, ...,9, A, B, C, D, E, F darstellbar?

Die Antworten lauten:

im Dualsystem: $V(4,2)= 2^4=16$

im Sedezimalsystem: $V(4,16) = 16^4 = 65'536$.

Aufgabe 116: Variation ohne Wiederholung

Beim Pferderennen muss man die Reihenfolge der ersten 3 Pferde von 15 Pferden beim Zieleinlauf vorhersagen. Wie viele Möglichkeiten gibt es?

5. Kombination

5.1. Einführung

Eine Anordnung von m Elementen aus n Elementen ohne Berücksichtigung der Reihenfolge heisst Kombination.

Auch hier kann man zwischen Kombinationen ohne und mit Wiederholung unterscheiden.

5.2. Kombination ohne Wiederholung

Bei Kombinationen kommt es nur auf die Auswahl der Elemente an, nicht auf deren Anordnung. Man erhält als Entscheidungsgraph zunächst den gleichen wie bei den Variationen. Da jedoch die Permutation der m ausgewählten Elemente nicht unterscheidbar sind, d.h. dieselbe Kombination darstellen, muss die Zahl der Variationen von m aus n Elementen durch die Zahl der Permutationen von m Elementen dividiert werden.

Die Zahl der Kombinationen von m Elementen aus n Elementen ohne Wiederholung beträgt:

$$C(m,n)=\frac{V(m,n)}{P(m)}=\frac{n!}{m!\bullet(n-m)!}$$

Beispiel: Ein geläufiges Beispiel für die Bildung von Kombinationen ohne Wiederholung ist das Lottospiel. Es sind 6 Zahlen aus 46 Zahlen in beliebiger Reihenfolge zu ziehen (Schweizer Zahlenlotto). Wie viele denkbare Kombinationen gibt es für sechs richtige Zahlen?

Die Antwort lautet:

$$C(6,45)=\frac{45!}{6!\bullet 39!}=8'145'060 \text{ Kombinationen}$$

Entsprechend können auch die Anzahl Kombinationen für 5 richtige Zahlen, 4 richtige Zahlen etc. ermittelt werden.

<u>Beispiel für 4 richtige Zahlen:</u>

Beim Schweizer Zahlenlotto (6 aus 45) werden sechs Zahlen gezogen, getippt wurden ebenfalls sechs Zahlen. Bei vier richtigen Treffern müssen also von den sechs gezogenen nur vier stimmen. Nun stellt sich die Frage, in wie vielen Kombinationen können vier Zahlen in diesen sechs gezogenen vorhanden sein:

$$\frac{n!}{m!\bullet(n-m)!}=\frac{6!}{4!\bullet(6-4)!}=15$$

Da nur vier Zahlen treffen müssen können die anderen beiden Zahlen beliebig sein, ausser den sechs gezogenen Zahlen, das heisst, wie viele Kombinationen ergeben sich aus den verbleibenden 2 Zahlen, welche nicht Treffer sind und deshalb von den nicht gezogenen Zahlen ausgewählt werden?

Es gibt die Kombination von 2 aus 39:

$$\frac{n!}{m!\bullet(n-m)!}=\frac{39!}{2!\bullet(39-2)!}=741$$

Teilt man nun die 8'145'060 Kombinationen von 6 Zahlen durch 15 (die Anzahl möglichen 4-er-Treffer) sowie durch 741 (die Anzahl Möglichkeiten der zwei nicht treffenden Zahlen), so erhält man die Anzahl Kombinationen von 4 aus 45 bei einem Tipp von sechs Zahlen.

5.3. Kombination mit Wiederholung

Stellt man sich eine Lottoziehung vor, bei der der Tischtennisball, der die gezogene Nummer trägt, wieder zurückgelegt wird und somit erneut gezogen werden kann, dann liegt ein Beispiel für die Bildung von Kombinationen mit Wiederholung vor.

Die Anzahl der Kombinationen von m Elementen aus n Elementen mit Wiederholungsmöglichkeit beträgt:

$$C(m,n) = \frac{(n+m-1)!}{m! \bullet (n-1)!}$$

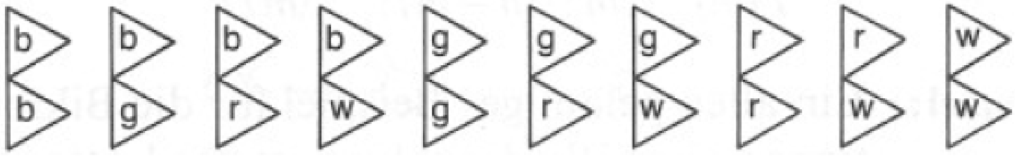
<u>Beispiele:</u>

An Bord eines Segelschiffes gibt es je zwei blaue, gelbe, rote und weisse Wimpel. Zwei von ihnen können zusammen aufgezogen werden, womit ein bestimmtes Signal verbunden ist. Um richtungsunabhängig zu sein, spielt die Reihenfolge keine Rolle. Wie viele Signale können übermittelt werden?

Nach der Formel erhält man

$$C(2,4) = \frac{(4+2-1)!}{2! \bullet (4-1)!} = \frac{5!}{2! \bullet 3!} = 10 \text{ Kombinationen mit Wiederholungen}$$

Die Wimpelkombinationen sind in diesem kleinen Beispiel auch noch vollständig aufzuschreiben:



Bei der Variante des Lottospiels, bei der der Tischtennisball, der die gezogene Nummer trägt, wieder zurückgelegt wird und somit erneut gezogen werden kann, gäbe es

$$C(6,49) = \frac{(49+6-1)!}{6! \bullet (49-1)!} = \frac{54!}{6! \bullet 48!} = 25'827'165 \text{ Kombinationen mit Wiederholungen}$$

d.h. drei Mal so viele, wie beim normalen Lotto.

Aufgabe 117: Kombination ohne Wiederholung

Ein Student muss in einer Prüfung acht von zwölf Fragen beantworten. Wie viele Möglichkeiten hat er, wenn er mindestens drei von den ersten fünf beantworten muss?

6. Aufgaben zu Kombinatorik und Wahrscheinlichkeitsrechnung

Aufgabe 118: Schokoladentafeln

Drei verschiedene Tafeln Schokolade seien vorhanden. Zwei von ihnen sollen ausgewählt werden.

a) Wie viele Möglichkeiten der Auswahl gibt es unter Berücksichtigung der Reihenfolge der Wahl der Schokoladentafeln (Situation: Zwei Kinder wählen je eine Tafel Schokolade aus drei unterschiedlichen Tafeln aus)?

b) Wie viele Möglichkeiten der Auswahl gibt es wenn die Reihenfolge nicht berücksichtigt wird (Situation: Eine Person nimmt von drei unterschiedlichen Tafeln Schokolade zwei Tafeln mit auf eine Wanderung)?

Aufgabe 119: Würfel

3 Würfel werden geworfen. Gesucht ist die Anzahl der möglichen Endstellungen dieser 3 Würfel wobei zwischen gleichen Endstellungen, welche durch verschieden Würfel erzielt werden nicht unterschieden wird (bspw. ②③② ist identisch mit ③②② sowie mit ②②③).

Aufgabe 120: Praktikumsplätze

12 Studenten und Studentinnen bewerben sich um 5 Praktikumsplätze wobei egal ist, welchem Studierenden welchen Praktikumsplatz zugewiesen wird.

a) Auf wie viele Möglichkeiten können die Plätze besetzt werden?

b) Wie viele Besetzungsmöglichkeiten gibt es, wenn einer Studentin A eine feste Zusage auf einen der 5 Plätze gemacht wurde?

c) Wie viele Besetzungsmöglichkeiten gibt es, wenn zwei Studierenden je eine feste Zusage auf je einen der 5 Plätze gemacht wurde?

d) Wie verändern sich die Chancen eines einzelnen Studierenden einen Platz zugeteilt zu erhalten, wenn 1 bzw. 2 Plätze im Voraus fest vergeben werden?

Aufgabe 121: Büchergestell

Wie viele mögliche Reihenfolgen gibt es, die 4 Bücher „Statistik“ (S), „Karl May: Der Schatz im Silbersee“ (K), „Volkswirtschaftslehre“ (V) und „Harry Potter: The Order of the Phoenix“ (H) in ein Regal zu stellen?

Aufgabe 122: Vier-Buchstaben-Wort

Wie viele Wörter mit vier Buchstaben (auch sinnlose Worte sind zugelassen) lassen sich aus den vier Buchstabensteinen A, B, E, R bilden?

Aufgabe 123: Pferderennen

Beim Pferderennen muss man die Reihenfolge der ersten 3 Pferde von 15 Pferden beim Zieleinlauf vorhersagen. Wie viele Möglichkeiten gibt es?

Aufgabe 124: Spielsteine

Wie viele Möglichkeiten gibt es, 4 rote, 3 schwarze und 5 gelbe Spielsteine in eine Reihe zu legen?

Aufgabe 125: Optische Rufanlage

Eine optische Rufanlage enthalte fünf verschiedenfarbige Felder. Jeder Person werden entweder eine oder zwei oder drei Farben als Rufzeichen zugeordnet. Wie viele Anschlüsse besitzt das System?

Aufgabe 126: Viele Wege zum Ziel

Gegeben sind drei Orte A, B und C. Zwischen A und B gibt es sechs, und zwischen B und C gibt es vier Wege.

a) Auf wie vielen Wegen kann man ohne Umweg von A über B nach C gelangen?

b) Auf wie vielen Wegen kann man die Strecke A-B-C-B-A zurücklegen?

c) Auf wie vielen Wegen kann man die Strecke A-B-C-B-A durchlaufen, ohne einen Teilweg mehr als einmal zu benutzen?

Aufgabe 127: Zahlen und Ziffern

Wiederholungen seien nicht erlaubt, das heisst jede der folgenden Ziffern darf höchstens einmal je dreistellige Zahl vorkommen.

a) Wie viele Zahlen mit drei Ziffern kann man mit den Ziffern 2, 3, 5, 6, 7 und 9 bilden?

b) Wie viele Zahlen aus Teilaufgabe a) sind kleiner als 400?

c) Wie viele Zahlen aus Teilaufgabe a) sind gerade?

d) Wie viele Zahlen aus Teilaufgabe a) sind kleiner als 400 und gerade?

Aufgabe 128: Euro Millions

Wie viele Ziehungsmöglichkeiten gibt es bei Euro Millions und wie hoch ist die Chance auf einen Haupttreffer?

Aufgabe 129: Dreiachser

An einem Dreiachser (beide Hinterachsen haben Zwillingsräder) müssen Pneus montiert werden. Auf wie viele verschiedene Arten können Pneus auf den Rädern des Dreiachsers montiert werden,

a) wenn alle Räder dieselben Pneu-Dimensionen aufweisen?

b) wenn die Innen- und Aussenpneus der Zwillingsräder unterschiedliche Dimensionen aufweisen?

c) wenn zwischen Innen- und Aussenpneu eines Zwillingsrades nicht unterschieden wird?

Aufgabe 130: Prüfungsaufgaben

Ein Student muss in einer Prüfung acht von zwölf Fragen beantworten. Wie viele Möglichkeiten hat er, wenn er mindestens drei von den ersten fünf beantworten muss?

Aufgabe 131: Zahlenlotto

Am 25. März 2006 wurden im Schweizer Zahlenlotto (6 aus 45) folgende Gewinnquoten ausbezahlt:

GEWINNZAHLEN & QUOTEN

SWISS LOTTO

3 10 36 40 43 44 35

Gewinnränge	Anzahl Gewinner	CHF
6 Richtige	0	0.00
5 Richtige + Zusatzzahl	3	161'213.20
5 Richtige	71	18'587.20
4 Richtige	4'935	50.00
3 Richtige	94'437	6.00

Ziehung vom 25.03.2006
Nächster Jackpot:
CHF 8'300'000

Ein Tipp einer Zahlenkombination kostet CHF 1.50. Ist es "günstiger", den Betrag von CHF 18'600.- mit einem "Fünfer", mit mehreren "Vierern" oder mit einer grossen Anzahl von "Dreiern" zu gewinnen?

Aufgabe 132: Hauptbahnhof

Am Zürcher Hauptbahnhof hat es 67 Geleise auf welchen Züge abfahren auf 5 Geleisen fahren Züge nach Bern. Wie hoch ist die Chance, dass ein Chinese, der nur chinesisch sprechen und lesen kann einen Zug nach Bern erwischt?

Aufgabe 133: Dezimieren

Der Begriff "dezimieren" kommt daher, dass früher besiegte Armeen jeden 10. der gefangenen Feinde erschossen haben. Wie hoch ist die Chance eines Soldaten zu überleben, wenn er einer unter 267 Gefangenen ist und eine "Dezimierung" bevorsteht?

Aufgabe 134: Kreise und Sehnen

Auf einem Kreis werden acht Punkte eingezeichnet und miteinander verbunden. Wie viele Kreissehnen entstehen so?

Aufgabe 135: Hörsaal

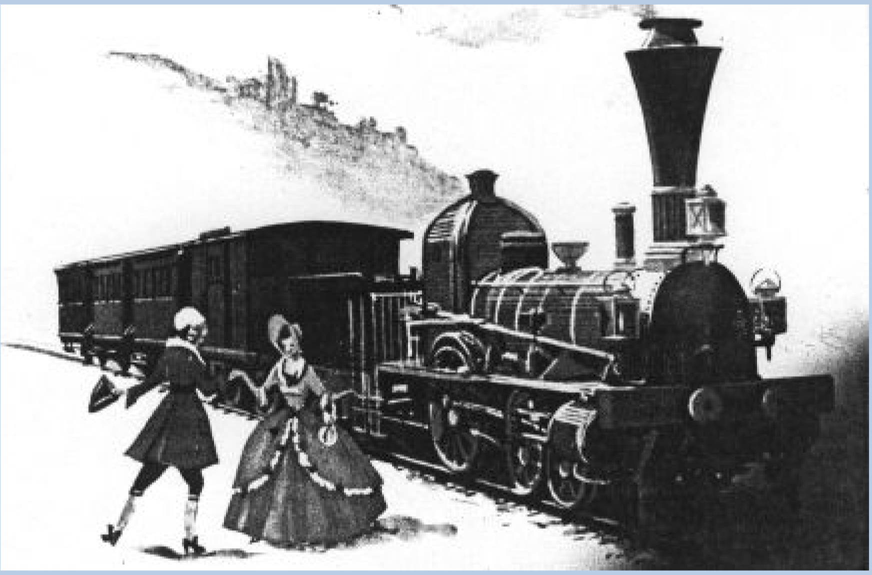
Wie viele Möglichkeiten gibt es, fünfzehn Studenten in einem Hörsaal mit einundzwanzig festen Plätzen zu platzieren?

Aufgabe 136: Stichprobe

Eine Sendung enthält zwölf Geräte (durch Seriennummer zu unterscheiden), von denen drei Geräte defekt sind. Wie viele verschiedene Stichproben vom Umfang vier sind notwendig, um mindestens ein beschädigtes Gerät zu eruieren?

Aufgabe 137: Spanisch-Brötli-Bahn

Ein Sonderzug (Replika der Spanisch-Brötli-Bahn) fährt ein einziges Mal von Zürich nach Baden und hält unterwegs an acht weiteren Bahnhöfen (insgesamt 10 Stationen inklusive Zürich und Baden). Wie viele verschiedene Fahrkarten (Normalpreis 2.Klasse, einfache Fahrt) sind für diesen Zug erhältlich?



Teil IX Statistik

1. Einführung

Traue nie einer Statistik, die Du nicht selbst gefälscht hast …

1.1. Wachstumsratenverzerrung

In einer Zeitung ist zu lesen, dass in Finnland seit 1995 die Kaufkraft der Löhne um zwanzig Prozent gestiegen ist, die Beschäftigung um zehn Prozent. In Deutschland hingegen, sei das Lohn- und Gehaltsniveau netto um knapp ein Prozent gestiegen, die Zahl der Erwerbstätigen um ganze 56.000.

Zahlen, die zu der naheliegenden Annahme verleiten, dass in Finnland die Beschäftigung boomt und die Löhne explodieren, in Deutschland hingegen der Aufschwung stagniert.

In Wirklichkeit handelt es sich hier um eine Wachstumsratenverzerrung. Die erreichte Höhe eines Wachstums hängt nämlich davon ab, wo das Wachstum begann. 1995 waren von einhundert Erwerbspersonen in Deutschland 9,4 arbeitslos, in Finnland aber 11,4 und 1995 kam ein Arbeitnehmer in Deutschland auf brutto 26 Mark 30 in der Stunde, in Finnland dagegen auf die Kaufkraft von achtzehn Mark.

1.2. Vorsortierte Stichprobe

Ein Heiratsinstitut wirbt mit der Information, dass Ehemänner länger lebten. Eingefleischte Junggesellen zwischen fünfundvierzig und vierundfünfzig sollten den Sprung ins Abenteuer Ehe wagen, um ihre Lebenserwartung zu erhöhen.

Laut Statistik der Universität Kalifornien werden in der Tat dreiundzwanzig Prozent der ledigen Männer dieser Altersgruppe in den nächsten zehn Jahren sterben. Das Todesrisiko verheirateter Männer liege dagegen nur bei elf Prozent.

Diese Zahlen, obwohl zutreffend, belegen nicht, dass die angetraute Zweisamkeit tatsächlich für ein hohes Alter sorgt. Männer, die geheiratet wurden, sind nämlich im Schnitt von vornherein wohlhabender und gesünder, als die, die keine abgekriegt haben. Das bedeutet: Nicht die Heirat verlängert das Leben, sondern die Durchschnittsfrau wählt einfach den Fitteren.

1.3. Bezugsgrösse

Fliegen sei im Vergleich zur Bahnfahrt ungleich sicherer - so hört man es immer wieder. Pro zurückgelegtem Kilometer lassen in der Bahn immerhin dreimal mehr Leute ihr Leben als im Flugzeug. Die Statistik stimmt.

Bezieht man aber die Verkehrstoten nicht auf die Kilometer, sondern auf die Reisezeit, ist es genau umgekehrt: Pro Stunde im Flugzeug lassen genau dreimal mehr Leute ihr Leben als pro Stunde in der Bahn. Kein Grund zur Panik, denn der geringeren Gefahr im Zug ist man dafür länger ausgesetzt. So gleicht es sich wieder aus.

2. Mittelwerte

2.1. arithmetisches Mittel

Das arithmetische Mittel gibt an, welchen durchschnittlichen Wert eine Folge von Messwerten hat. Für die Ermittlung des arithmetischen Mittels spielt sowohl der effektive Wert einer Messung eine Rolle wie die Tatsache, wie oft dieser Wert vorgekommen ist.

Das arithmetische Mittel berechnet man nach der Formel:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots\ldots\ldots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

2.2. geometrisches Mittel

Für die Ermittlung des geometrischen Mittels spielt sowohl der effektive Wert einer Messung eine Rolle wie die Tatsache, wie oft dieser Wert vorgekommen ist.

Das geometrische Mittel berechnet man mit der Formel:

$$\sqrt[n]{(x_1 * x_2 * x_3 * \ldots. * x_n)}$$

Das geometrische Mittel ist sinnvoll anwendbar:

- bei geometrischen Zahlenfolgen, d.h. wenn die Spannweite der Messwerte mehrere Grössenordnungen umfasst;
- bei Zähldaten, bei denen bekannt ist, dass sie durch multiplikative Wirkung entstanden sind (z.B. Zellvermehrungen, Börsenindizes);
- bei Reihen von Verhältniszahlen damit alle Werte in gleichem Masse zur Mittelwertbildung beitragen (z.B. Verhältnis von Höhe und Durchmesser von Eiern).

Das geometrische Mittel wird durch Extremwerte kaum beeinflusst.

2.3. Modus

Der Modus gibt an, welcher Wert in einer Reihe von Messwerten am häufigsten vorgekommen ist.

<u>Beispiel:</u>

Gegeben sind die folgenden Messwerte:

7.0; 6.8; 3.1; 7.0; 7.3; 7.0

Der häufigste Wert (Modus) ist 7.0 mit 3 Nennungen

2.4. Median

Der Median gibt an, welcher Wert in der sortierten Folge einer Reihe von Messwerten in der Mitte steht. Ist die Anzahl der Werte gerade, wird der Median als Durchschnitt der beiden mittleren Werte berechnet. Wie oft ein gleicher Messwert aufgetreten ist, spielt bei der Ermittlung des Median eine Rolle.

Der Median:

- halbiert eine nach Grösse der Einzelwerte geordnete Datenreihe;
- hängt nur von der Höhe des bzw. der mittleren Glieder ab;
- wird durch Extremwerte am wenigsten beeinflusst.

Der Median ist geeignet:

- bei sehr kleinen Beobachtungsreihen;
- bei Beobachtungsreihen, die an den Enden offene Klassen aufweisen;
- bei ordinal und metrisch skalierten Merkmalen.

<u>Beispiel:</u>

Gegeben sind die folgenden Messwerte:

3.0; 2.8; 3.1; 3.0; 3.3; 3.0

Sortierte Reihenfolge: 3.3; 3.1; 3.0; 3.0; 3.0; 2.8

Da es sich um eine gerade Anzahl von sich unterscheidenden Werten handelt, werden die beiden mittleren Werte (3.0 ; 3.0) gemittelt. Somit ergibt sich für den Median der Wert 3.0.

3. Streuungsmasse

3.1. Varianz

Das Quadrat s^2 der Standardabweichung sx heisst empirische Varianz

Formel für die Varianz:

$$s_x{}^2 = \frac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \ldots\ldots + (x_n - \overline{x})^2}{n}$$

$$s_x{}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2$$

3.3. Standardabweichung

Sie Standardabweichung ist ein Streuungsmass und zeigt, wie sich einzelne Messwert um einen Mittelwert bewegen.

Die Standardabweichung wird wie folgt ermittelt:

1. Berechnung der Abweichungen der Einzelwerte xi vom Mittelwert x;
2. Quadrieren der obigen Abweichungen, dadurch verschwinden allfällige negative Differenzen und grosse Abweichungen fallen stärker ins Gewicht;
3. Mittelwertbildung aller quadrierten Abweichungen;
4. Quadratwurzel aus dem oben erhaltenen Mittelwert ziehen. Das Ergebnis hat dieselbe Dimension (Sorte, bspw. kg, m, CHF etc.) wie die Einzelwerte.

Formel für die Standardabweichung:

$$s_x = \sqrt{\frac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \ldots\ldots + (x_n - \overline{x})^2}{n}}$$

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}$$

3.4. Quantil

Quantile sind Teile von nach Rang oder Grösse der Einzelwerte sortierten Messwerten. Wird die gesamte Reihe der Messwerte n gleichgrosse Teile unterteilt, so gibt es entsprechend n−1 Quantile. Ein Quantil ist also eine Schnittstelle zwischen den Unterteilungen. Je nachdem wie gross n gewählt wird, spricht man von

- Quartilen (n=4)
- Quintilen (n=5)
- Dezilen (n=10) oder
- Perzentilen (n=100).

Dabei ist der Wert eines bestimmten Quantils (z. B. des zweiten Quintils) nicht grösser als jeder Wert unterhalb dieses Quantils.

Beispiel:

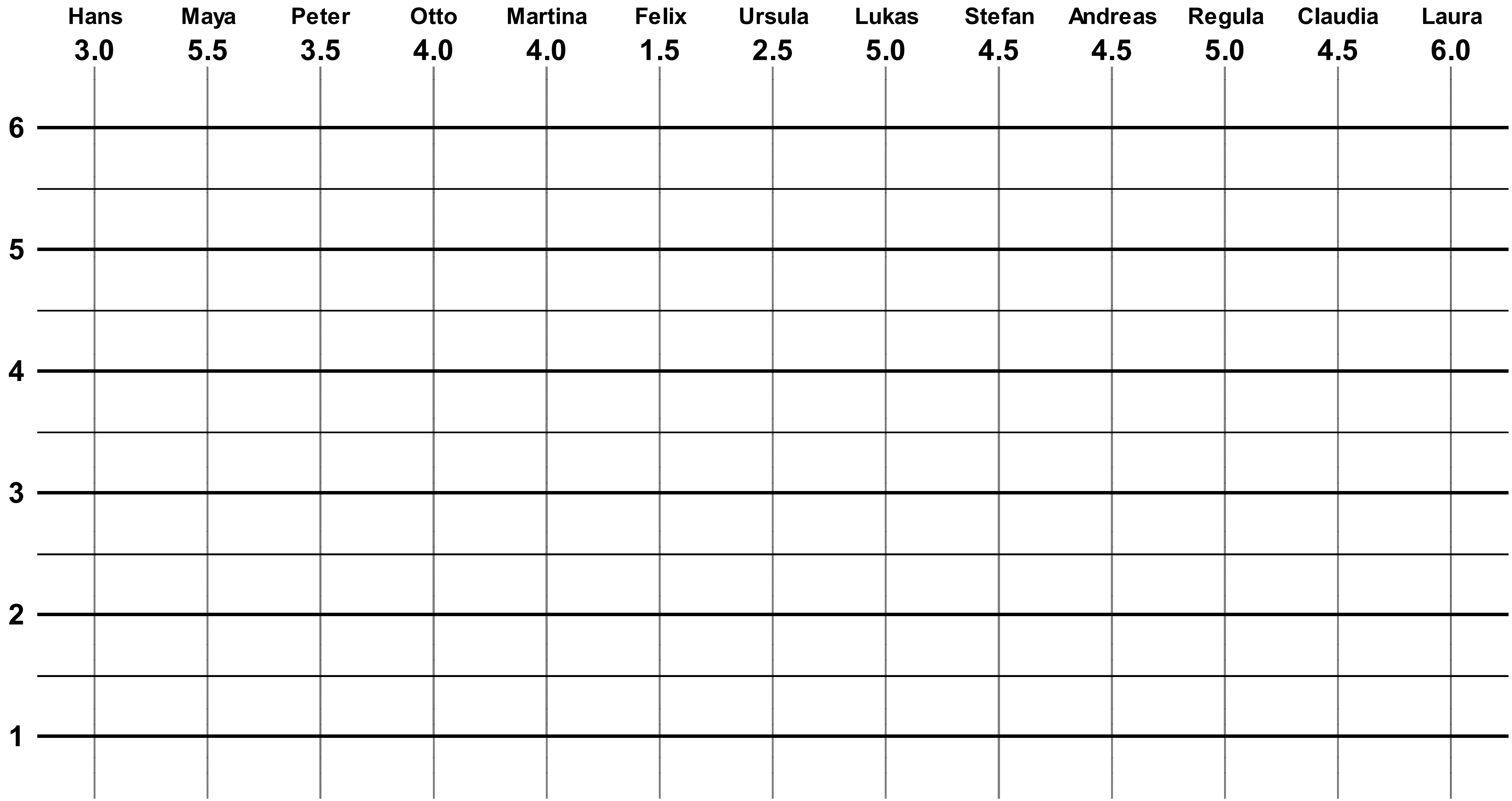
Messwerte:	3, 16, 2, 10, 3, 19, 6, 13, 1, 3, 18, 3, 20, 15, 7, 8, 13, 19, 19, 16
Messwerte sortiert:	1, 2, 3, 3, 3, 3, 6, 7, 8, 10, 13, 13, 15, 16, 16, 18, 19, 19, 19, 20
erstes Quartil = 3	$\boxed{1, 2, 3, 3, \mathbf{3}}, \boxed{3, 6, 7, 8, 10}, \boxed{13, 13, 15, 16, 16}, \boxed{18, 19, 19, 19, 20}$
drittes Quintil = 13	$\boxed{1, 2, 3, 3}, \boxed{3, 3, 6, 7}, \boxed{8, 10, 13, \mathbf{13}}, \boxed{15, 16, 16, 18}, \boxed{19, 19, 19, 20}$
siebtes Dezil = 16	$\boxed{1, 2}, \boxed{3, 3}, \boxed{3, 3}, \boxed{6, 7}, \boxed{8, 10}, \boxed{13, 13}, \boxed{15, \mathbf{16}}, \boxed{16, 18}, \boxed{19, 19}, \boxed{19, 20}$

Der **Median** ist im Grunde genommen auch ein Streuungsmass, obwohl er oft im gleichen Zuge mit den Mittelwerten arithmetisches Mittel, geometrisches Mittel und Modalwert genannt wird. Er wird zur Familie der Quantile gezählt und entspricht dem 50%-Quantil.

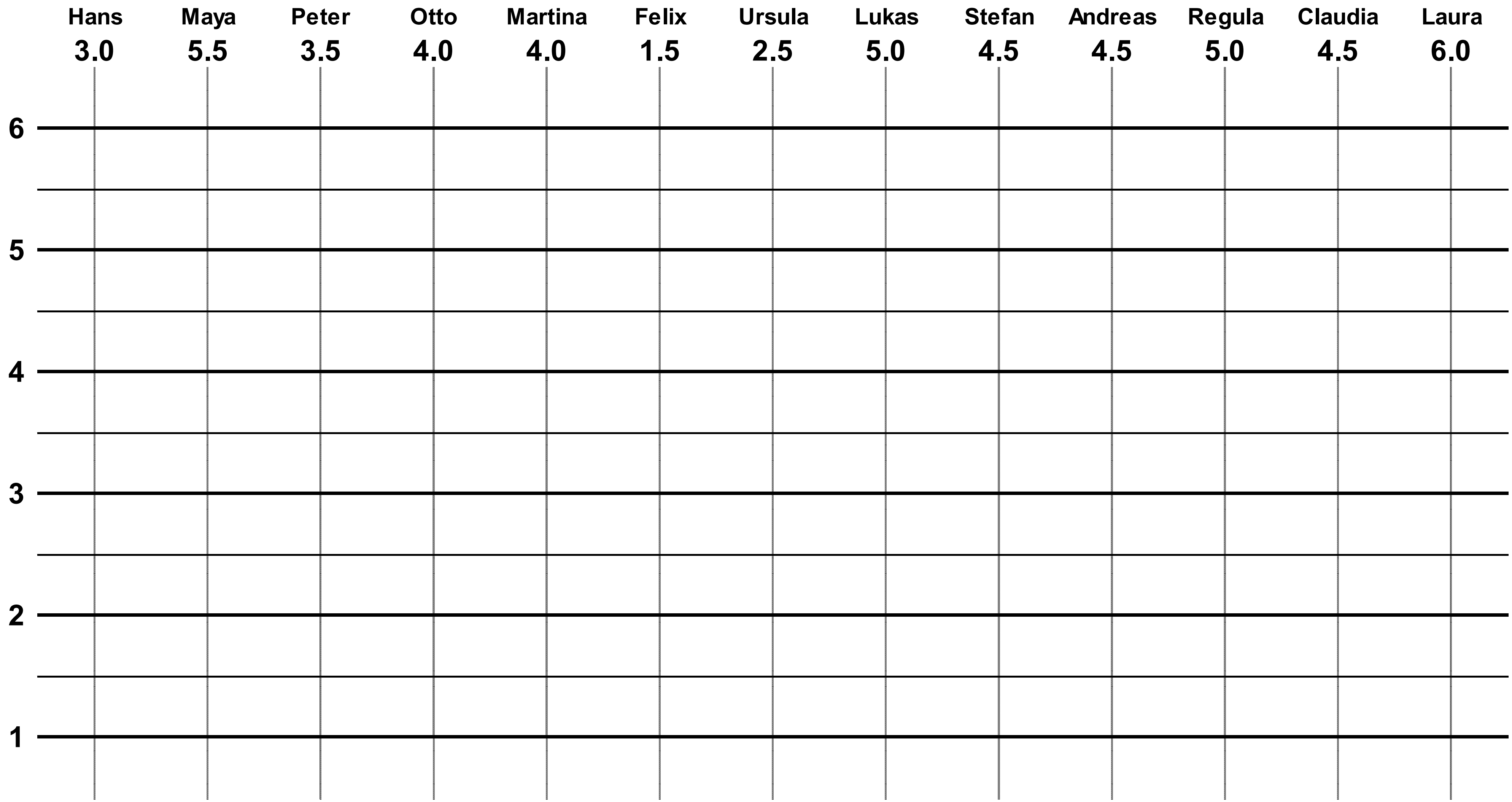
3.5. Beispiel Varianz und Standardabweichung

Schüler	Hans	Maya	Peter	Otto	Martina	Felix	Ursula	Lukas	Stefan	Andreas	Regula	Claudia	Laura
a) Noten	**3.0**	**5.5**	**3.5**	**4.0**	**4.0**	**1.5**	**2.5**	**5.0**	**4.5**	**4.5**	**5.0**	**4.5**	**6.0**
b) arithm. Mittel von a)													
c) Differenz zwischen a) und b)													
d) Quadrate von c)													
e) arithm. Mittel von d) = **Varianz**													
Untergrenze Varianz, b) - e)													
Obergrenze Varianz, b) + e)													
f) Quadratwurzel aus e) = **Standardabweichung**													
Untergrenze Standardabweichung, b) - f)													
Obergrenze Standardabweichung, b) + f)													

3.5.1. Diagramm Varianz



3.5.2. Diagramm Standardabweichung



4. Aufgaben zur Statistik

Aufgabe 138: Ewige Liebe

Ausgangslage:

631 Jugendliche im Alter zwischen 12 und 19 Jahren wurden befragt, in welchem Alter sie sich zum ersten Mal verliebt haben (Merkmal X). Die Ergebnisse sind in der nachfolgenden Tabelle aufgeführt.

Alter in Jahren	absolute Häufigkeit
1.0	3
3.0	5
4.0	16
5.0	20
6.0	32
7.0	32
8.0	58
9.0	36
10.0	70
11.0	61
11.5	1
12.0	116
13.0	72
13.5	1
14.0	59
15.0	28
16.0	11
17.0	4
18.0	3
19.0	3
	631

Aufgabe a)

Wie viele Ausprägungen hat das Merkmal X?

Aufgabe b)

Zeichnen Sie die empirische Verteilungsfunktion im Bereich von 0 bis 10 Jahren.

Aufgabe c)

Wie viele der Befragten (absolut und relativ) waren beim ersten Verliebt sein jünger als 7 bzw. älter als 13 Jahre?

Aufgabe d)

In welchem Alter waren 60% der Befragten schon mindestens einmal verliebt?

In welchem Alter waren 60% der Befragten schon genau einmal verliebt?

<u>Aufgabe e)</u>

Angenommen, die in der Ausgangslage aufgeführte Tabelle sei eine bereinigte Darstellung der Umfrage, in dem Sinn, dass ursprünglich 648 Jugendliche im Alter zwischen 12 und 19 Jahren befragt worden waren, von denen aber 17 die Antwort "Ich war bis jetzt noch nie verliebt" gegeben haben. Wie ändern sich Ihre Ergebnisse zu den obigen Aufgaben a bis d, wenn sie diese 17 Personen in die Auswertung mit einbeziehen?

<u>Aufgabe f)</u>

Wählen Sie zu den vorstehenden Daten aus Aufgabe 5 eine Klasseneinteilung wie folgt:

Klasse 1: 0 bis unter 6 Jahre

Klasse 2: 6 bis unter 10 Jahre

Klasse 3: 10 bis unter 11 Jahre

Klasse 3: 11 bis unter 13 Jahre

Klasse 4: 13 bis unter 20 Jahre

Zeichnen Sie das zugehörige Histogramm.

<u>Aufgabe g)</u>

Bestimmen Sie zu den vorstehenden Daten Median, arithmetisches Mittel und Modus, jeweils sowohl für die Rohdaten (Ausgangslage) als auch für die wie in Aufgabe f) klassierten Daten.

Aufgabe 139: Informatik Höhere Fachschule

Der Fachbereich Informatik einer Höheren Fachschule weist im Jahr 2003, 2004 und 2005 eine Zunahme der Studierendenzahlen um 21, 26 bzw. 9 Prozent auf (jeweils bezogen auf das Vorjahr).

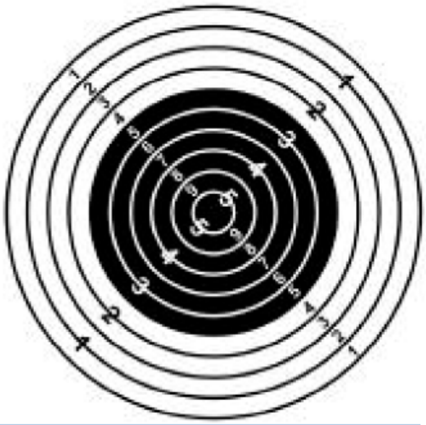
a) Um wie viele Prozente ist die Anzahl der Studierenden insgesamt und im Schnitt über die drei Jahre gestiegen?

b) Um wie viele Prozente darf die Anzahl der Studierenden in den nächsten zwei Jahren maximal durchschnittlich fallen, um nicht unter das Ausgangsniveau von vor drei Jahren zu gelangen?

Aufgabe 140: Schützenverein

Zwei Schützenvereine veranstalten ein Wettschiessen über 300 Meter auf eine 5er-Scheibe (vgl. Abbildung rechts) wobei jeder Verein mit 9 Schützen antritt und jeder Schütze einen Schuss aus seinem Gewehr auf die Scheibe abgibt. Folgende Resultate werden erzielt:

Schützen	Verein A	Verein B
Schütze 1	3	2
Schütze 2	4	1
Schütze 3	3	1
Schütze 4	3	5
Schütze 5	2	1
Schütze 6	2	5
Schütze 7	2	4
Schütze 8	4	5
Schütze 9	3	2
geometrisches Mittel	**2.794**	**2.327**
Standardabweichung	**0.737**	**1.728**
Varianz	**0.543**	**2.988**



a) Ermitteln Sie für beide Vereine folgende statistischen Werte (Ausweis auf 2 Nachkommastellen genau):

	Verein A	Verein B
arithmetisches Mittel		
Modus		
Median		

b) Bei welcher Vereinsmannschaft hätten Sie als 10. Schütze die grösseren Chancen zur besseren Hälfte der Schützen zu gehören?

Begründen Sie Ihre Antwort in Stichworten

Verein:

Begründung:

Aufgabe 141: Mathematikkurs

Ein Mathematikkurs wird parallel für zwei Gruppen geführt. Gruppe G wird durch Lehrer Gauss, Gruppe E durch Lehrer Euler unterrichtet. Jeweils die bessere Hälfte der Teilnehmer jedes der beiden Kurse wird ausgezeichnet. Für welchen Kurs (Gruppe G bei Lehrer Gauss oder Gruppe E bei Lehrer Euler) melden Sie sich an, um Ihre Chance, eine Auszeichnung zu erhalten, zu maximieren, wenn Ihnen die in der folgenden Tabelle aufgeführten Abschlüsse des letzten Kurses bekannt sind:

Schüler	**Gauss**	**Euler**
Schüler 1	5.0	6.0
Schüler 2	4.0	5.5
Schüler 3	5.5	1.0
Schüler 4	2.5	5.5
Schüler 5	3.5	1.5
Schüler 6	4.0	5.0
Schüler 7	4.0	4.0
Schüler 8	1.5	5.5
Schüler 9	6.0	2.0
arithmetisches Mittel	**4.000**	**4.000**
Standardabweichung	**1.333**	**1.856**
Varianz	**1.778**	**3.444**

a) Ermitteln Sie für beide Kursgruppen folgende statistischen Werte (Ausweis auf 2 Nachkommastellen genau):

	Gauss	Euler
geometrisches Mittel		
Modus		
Median		

b) Bei welcher Kursgruppe hätten Sie die grösseren Chancen zur besseren Hälfte der Schüler zu gehören und damit eine Auszeichnung zu erhalten?

Begründen Sie Ihre Antwort in Stichworten

Gruppe:

Begründung:

Aufgabe 142: Würfelwette

Zwei Ritter würfeln um die Wette. Der Ritter von Falkenburg hat seinen eigenen Würfel aus reinem Messing mitgebracht, der Ritter von Rebenberg seinen Würfel aus Zinn. Beide Würfel haben durch die nicht perfekte Herstelltechnik im Mittelalter leicht unausgewogene Gewichtsverteilungen. Nach je 13 Würfen zeigt sich nebenstehendes Bild:

a) Ermitteln Sie für beide Ritter folgende statistischen Werte ihrer Würfe (Ausweis auf 2 Nachkommastellen genau):

	Ritter von Falkenburg	Ritter von Rebenberg
geometrisches Mittel		
Modus		
Median		

b) Nun kommt Ritter Löwenherz zur Spielrunde. Ritter Rebenberg meint: "Wir haben beide denselben Durchschnitt (arithmetisches Mittel) von etwas mehr als einer Drei geworfen. Du, Ritter Löwenherz, hast einen Wurf zu Gute. Wirfst Du eine höhere Augenzahl als unser beider Durchschnitt (arithmetisches Mittel), hast Du gewonnen!" Welchen Würfel wählt Löwenherz aus, um seine Gewinnchancen zu maximieren, denjenigen aus Messing oder denjenigen aus Zinn? Begründen Sie Ihre Antwort in Stichworten

Gewählter Würfel:

Begründung:

Aufgabe 143: Fallstudie Fertigungsprozess

Folgende Betriebsdaten über einen parallelen Fertigungsprozess der vergangenen Woche auf drei gleichartigen Anlagen liegen vor.

Los#	Anlage A		Anlage B		Anlage C	
	Durchlaufzeit	Ausschuss	Durchlaufzeit	Ausschuss	Durchlaufzeit	Ausschuss
1	4.4	9.6%	4.1	8.6%	4.9	5.4%
2	6.1	2.1%	5.4	9.2%	4.1	6.0%
3	6.3	6.7%	3.1	0.3%	3.4	7.1%
4	6.9	5.5%	2.5	4.5%	2.5	6.3%
5	2.9	3.0%	3.0	2.6%	5.4	7.3%
6	5.8	3.9%	7.0	7.5%	7.1	5.3%
7	7.4	3.7%	9.1	7.6%	3.7	5.1%
8	3.2	4.9%	1.3	9.0%	4.3	6.7%
Summen	**43.0**	**39.4%**	**35.5**	**49.3%**	**35.4**	**49.2%**
arithm. Mittel	**5.38**	**4.9%**	**4.44**	**6.2%**	**4.43**	**6.2%**
geom. Mittel	**5.11**	**4.5%**	**3.79**	**4.4%**	**4.24**	**6.1%**
Diff. Mittelwerte	**0.27**	**0.5%**	**0.65**	**1.8%**	**0.19**	**0.1%**
Standardabw.	**1.57**	**2.2%**	**2.42**	**3.1%**	**1.31**	**0.8%**
Median	**5.95**	**4.4%**	**3.60**	**7.6%**	**4.20**	**6.2%**

Anschaffungsjahr Anlage A: 2007

Betriebsstunden Anlage A: 8‘500

Anschaffungsjahr Anlage B: 2009

Betriebsstunden Anlage B: 5‘300

Anschaffungsjahr Anlage C: 2010

Betriebsstunden Anlage C: 3‘900

Da ein massiver Auftragsrückgang eines grossen Kunden erwartet wird, soll aus Kostengründen durch Desinvestition die Produktionskapazität um eine Anlage reduziert werden. Bei keiner der Anlagen ist mit einem substanziellen Liquidationserlös zu rechnen. Aus Erfahrung rechnen Sie bei allen Anlagen mit maximalen Laufzeiten von über 30‘000 Stunden. Welche der Anlagen (A, B oder C) schlagen Sie auf Grund der vorliegenden Betriebsdaten zur Desinvestition vor. Begründen Sie Ihre Überlegungen.

Aufgabe 144: Fallstudie Kundenstruktur

Folgend finden Sie die Aufstellung über die Wochenbestellungen Ihrer sechs wichtigsten Kunden. Die Lieferungen erfolgten bisher immer durch einen externen Spediteur. Im Rahmen des Projektes „Service2020“ (umfassenden Abbildung Ihres Wertschöpfungsprozesses mit eigenen Ressourcen) planen Sie die Belieferung selbst zu übernehmen. Welche der Kunden A bis F ziehen Sie in Ihr Pilotprojekt der Selbstbelieferung mit ein und weshalb?

Kalenderwoche	Kunde A	Kunde B	Kunde C	Kunde D	Kunde E	Kunde F
1	572	307	923	718	181	972
2	805	387	284	887	687	565
3	254	515	440	769	413	845
4	285	84	720	434	650	914
5	684	247	252	215	507	69
6	437	377	731	476	196	626
7	989	319	605	481	136	138
8	917	710	561	831	230	56
9	590	70	843	563	623	563
10	971	583	368	952	25	326
11	860	213	574	63	23	319
12	780	465	688	137	512	245
13	653	31	385	207	488	155
14	57	699	354	818	750	697
15	845	502	635	178	524	891
16	985	600	266	595	159	468
17	926	274	281	420	141	690
18	132	914	138	368	340	516
19	679	82	100	629	580	140
20	428	735	966	395	947	323
21	361	450	330	357	458	441
22	63	389	540	676	59	29
23	994	702	999	349	865	713
24	343	572	532	834	417	41
25	996	293	934	66	508	647
26	578	571	893	577	167	13
27	85	941	153	452	381	541
28	211	940	232	197	888	375
29	497	873	708	372	873	952
30	62	683	370	72	561	255
31	149	256	488	917	594	299
32	479	100	26	344	200	313
33	295	807	679	53	544	924
34	957	126	439	879	39	97
35	101	588	37	737	641	1
36	453	764	155	211	770	759
37	478	685	752	692	930	68
38	688	528	277	823	111	904
39	922	517	463	249	687	832
40	642	141	481	333	545	22
41	255	945	666	184	70	912
42	573	757	580	154	542	88
43	589	271	681	587	479	745
44	133	946	463	197	541	168
45	7	700	486	989	850	988
46	537	566	131	162	715	378
47	20	296	659	276	603	819
48	205	192	971	538	556	9
49	101	222	957	570	750	932
50	212	996	239	818	116	982
51	884	638	381	300	789	310
52	233	328	23	254	52	291
Summe	25'952	25'897	25'839	24'355	24'413	24'366
arithm. Mittel	499	498	497	468	469	469
Varianz	100'021	73'256	73'099	73'337	73'547	109'332
Standardabw.	316	271	270	271	271	331
Median	488	516	484	427	518	410

Teil X Aussagenlogik

1. Geschichte der Aussagenlogik

1700: Gottfried Wilhelm Leibniz träumt von einer allgemeinen Methode, in der Beweise in der Mathematik zur reinen Symbolmanipulation reduziert werden.

1854: George Boole ("The Laws of Thought") schafft dafür die Grundlage mit der Booleschen Algebra.

George Boole wurde am 2. November 1815 in Lincoln geboren. Seine Kenntnisse über die Mathematik hat er sich zum grössten Teil im Selbststudium angeeignet. So wurde er 1849 ohne ein richtiges Studium absolviert zu haben Professor für Mathematik am Queen's College in Cork berufen. Im Jahre 1854 legte Bool schliesslich den Grundstein für seine, die Bool'sche Algebra. Er beschrieb in seinem Werk An Investigation of the Laws of Thought ein algebraisches System, das eben diese Bezeichnung Boole'sche Algebra erhielt und primär für das Studium der reinen Mathematik und für die Entwicklung moderner Computer von grösster Bedeutung ist. Am 8. Dezember 1864 starb Boole, nur wenige Tage nach seinem 49. Geburtstag, in Ballintemple bei Cork.

1900: David Hilbert schlug vor, die gesamte Mathematik als formales System aufzubauen, in dem alle Theoreme durch Textersetzung bewiesen werden können. Er meinte, die Mathematik muss vollständig, konsistent und entscheidbar sein und alle Wahrheiten können bewiesen werden, falsches ist nicht beweisbar. Damit ist jede Aussage entweder wahr oder falsch.

1929: Kurt Gödel zeigt, dass das nicht möglich ist. Jedes formale System, das arithmetische Ausdrücke enthält, ist entweder unvollständig oder inkonsistent und es gibt arithmetische Aussagen, die nicht entscheidbar sind.

2. Die Aussage

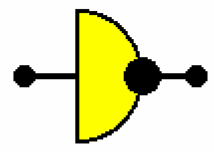
Eine Aussage (A) ist ein Satz, der entweder wahr (w) oder falsch (f) ist. Daraus folgt, dass jeder Aussage ein Wahrheitswert (v), welcher ebenfalls die Zustände wahr (w) oder falsch (f) annehmen kann, zugeordnet ist.

3. Boolsche Operatoren

3.1. NOT (Negation ¬)

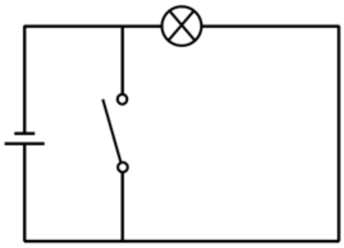
Aussage A: Es regnet.

Negation der Aussage A: Es regnet nicht.



Zustände der Aussage A	Wahrheitswert (v) der Negation der Aussage A **¬A**
w	**f**
f	**w**

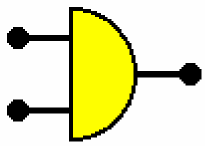
Schaltungsdarstellung der Negation:



3.2. AND (Konjunktion ∩)

Aussage A: Es regnet.

Aussage B: Der Mann trägt einen Hut.

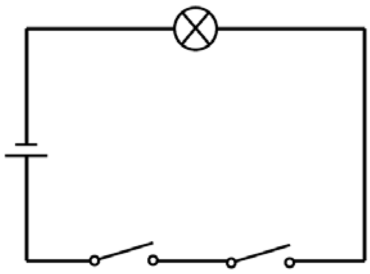


Konjunktion der Aussagen A und B

Es regnet und der Mann trägt einen Hut. Gemäss Wahrheitstabelle ist die Konjunktion dieser beiden Aussagen nur dann richtig wenn der Mann ausschliesslich einen Hut trägt, wenn es regnet und sonst nie, das heisst, dass er immer wenn es regnet einen Hut anzieht.

Zustände der Aussage A	Zustände der Aussage B	Wahrheitswert (v) der Konjunktion der beiden Aussagen **A ∩ B**
w	w	**w**
w	f	**f**
f	w	**f**
f	f	**f**

Schaltungsdarstellung der Konjunktion:



Aufgabe 145: Wahrheitswerte von Aussagen

Stellen Sie den Wahrheitswert folgender Aussage fest:

Ich esse, wenn ich nicht satt bin und ein Brot habe. Aussage A: ich bin satt, Aussage B: ich habe ein Brot.

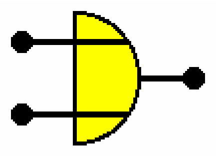
¬A ∩ B

A	B	¬	A	∩	B
w	w		w		w
w	f		w		f
f	w		f		w
f	f		f		f

3.3. OR (Disjunktion ∪)

Aussage A: Es regnet.

Aussage B: Der Mann trägt einen Hut.

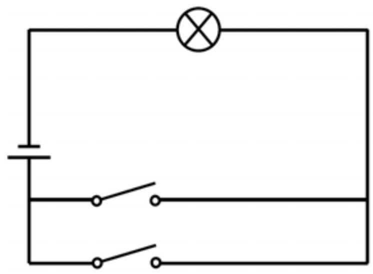


Disjunktion der Aussagen A und B:

Entweder es regnet oder der Mann trägt einen Hut. Gemäss Wahrheitstabelle trägt der Mann einen Hut wenn es regnet oder er trägt keinen Hut wenn es regnet oder er trägt einen Hut wenn es nicht regnet. Es kann aber nie vorkommen, dass der Mann keinen Hut trägt, wenn es nicht regnet, das heisst, immer bei schönem Wetter trägt der Mann einen Hut.

Zustände der Aussage A	Zustände der Aussage B	Wahrheitswert (v) der Disjunktion der beiden Aussagen **A ∪ B**
w	w	**w**
w	f	**w**
f	w	**w**
f	f	**f**

Schaltungsdarstellung der Konjunktion:



Aufgabe 146: Wahrheitstabelle

Stellen Sie den Wahrheitswert folgender Aussagen mittels einer Wahrheitstabelle fest:

B ∪ A ∩ ¬C

A	B	C						

Aufgabe 147: Wahrheitstabelle

Stellen Sie den Wahrheitswert folgender Aussagen mittels einer Wahrheitstabelle fest:

$(\neg A \cup B) \cap B \cap \neg C$

A	B	C	($\neg$	A	$\cup$	B)	$\cap$	B	$\cap$	$\neg$	C

3.4. Implikation (wenn dann, $\Rightarrow$)

Zustände der Aussage A	Zustände der Aussage B	Wahrheitswert (v) der Implikation der beiden Aussagen **A $\Rightarrow$ B**
w	w	**w**
w	f	**f**
f	w	**w**
f	f	**w**

3.5. Äquivalenz (genau dann wenn, $\Leftrightarrow$)

Zustände der Aussage A	Zustände der Aussage B	Wahrheitswert (v) der Äquivalenz der beiden Aussagen **A $\Leftrightarrow$ B**
w	w	**w**
w	f	**f**
f	w	**f**
f	f	**w**

3.5.1. Beispiele zur Äquivalenz

Wasser friert genau dann, wenn seine Temperatur bei 0° Celsius oder tiefer liegt.

Aussage A: Das Wasser gefriert

Aussage B: Die Wassertemperatur liegt bei 0° Celsius oder tiefer

Eine Motorfahrzeugbatterie wird genau dann geladen, wenn die Lichtmaschine oder der Generator läuft.

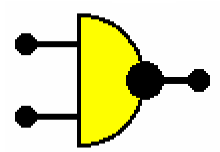
Aussage A: Die Motorfahrzeugbatterie wird geladen.

Aussage B: Die Lichtmaschine oder der Generator läuft.

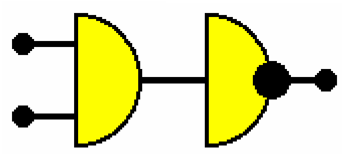
3.6. NAND (NOT AND)

Zustände der Aussage A	Zustände der Aussage B	Wahrheitswert (v) des NAND-Operators der beiden Aussagen **A** NAND **B**
w	w	**f**
w	f	**w**
f	w	**w**
f	f	**w**

Folgend das Symbol für NAND:



NAND kann auch durch die Kombination von AND und NOT abgebildet werden:

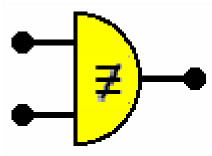


Zustände der Aussage A	Zustände der Aussage B	Wahrheitswert (v) des NAND-Operators der beiden Aussagen **A** NAND **B**			
		¬	**(A**	∩	**B)**
w	w	**f**	~~w~~	~~w~~	~~w~~
w	f	**w**	~~w~~	~~f~~	~~f~~
f	w	**w**	~~f~~	~~f~~	~~w~~
f	f	**w**	~~f~~	~~f~~	~~f~~

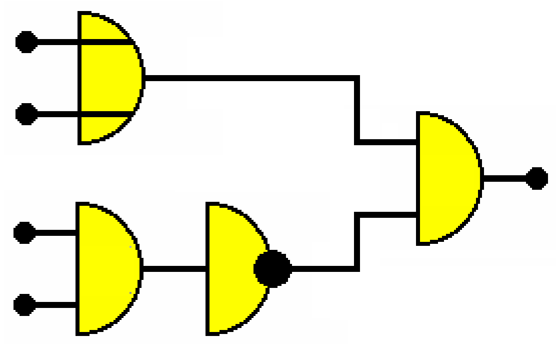
3.7. XOR (exklusives oder)

Zustände der Aussage A	Zustände der Aussage B	Wahrheitswert (v) des XOR-Operators der beiden Aussagen **A** XOR **B**
w	w	**f**
w	f	**w**
f	w	**w**
f	f	**f**

Folgend das Symbol für XOR:



XOR kann auch durch die Kombination von AND und NOT abgebildet werden:



Zustände der Aussage A	Zustände der Aussage B	Wahrheitswert (v) des XOR-Operators der beiden Aussagen **A** XOR **B**							
		(A	∪	**B)**	∩	¬	**(A**	∩	**B)**
w	w	~~w~~	~~w~~	~~w~~	**f**	~~f~~	~~w~~	~~w~~	~~w~~
w	f	~~w~~	~~w~~	~~f~~	**w**	~~w~~	~~w~~	~~f~~	~~f~~
f	w	~~f~~	~~w~~	~~w~~	**w**	~~w~~	~~f~~	~~f~~	~~w~~
f	f	~~f~~	~~f~~	~~f~~	**f**	~~w~~	~~f~~	~~f~~	~~f~~

3.8. Rechenprioritäten

Es gilt die folgende Prioritätsreihenfolge:

1. Negation
2. Konjunktion (und, logisches AND)
3. Disjunktion (oder, logisches OR)
4. Implikation (wenn dann)
5. Äquivalenz (genau dann wenn)

3.9. Spezialfälle

3.9.1. Tautologie

Eine Tautologie ist eine Aussage, welche immer gilt, egal welchen Wahrheitswert die Aussagen A und B haben.

Beispiel: $\neg\mathbf{A} \cup (\mathbf{B} \cup \mathbf{A})$

3.9.2. Reductio ad absurdum

Wenn die Annahme besteht, dass eine Aussage falsch ist, zu einem Widerspruch führt, dann muss sie wahr sein. Derselbe Grundgedanke führt zu dem Prinzip, dass jede Aussage entweder wahr oder falsch sein muss.

4. Aufgaben zur Aussagenlogik

4.1. Einführungsaufgaben

Aufgabe 148: Die "und"-Verknüpfung

Notieren Sie zu folgenden Sachverhalten die betreffenden Aussagen sowie deren Verknüpfungen.

a) Paul und Paula haben eine 5 in Mathematik.

b) Alle Studierenden mit einer 2 und einer 3 in der Mathematikprüfung bleiben nach dem Unterricht bitte noch im Schulzimmer.

c) Johanna und Karla treffen sich.

d) 5 und 7 sind Primzahlen.

e) Er geht auf der rechten und auf der linken Seite der Strasse.

f) Alle, die den Klassenkassenbeitrag noch nicht bezahlt haben und die ihr Impfbuch noch nicht abgegeben haben, bleiben nachher noch im Klassenzimmer.

Aufgabe 149: Die "oder"-Verknüpfung

a) Ich esse gerne Käse oder Marmelade zum Frühstück.

b) Heute Abend gehe ich ins Kino oder bleibe zu Hause.

c) Entweder Du gibst mir jetzt mein Geld wieder, oder ich gehe zu Deinem Vater.

d) Studiert sie nun Physik oder Mathematik ?

e) Gib mir alle natürlichen Zahlen zwischen 1 und 100 an, die durch 3 oder 5 teilbar sind.

Aufgabe 150: Die "nicht"-Verknüpfung

a) Es stimmt nicht, dass er eine 1 geschrieben hat.

b) Morgen müssen die katholischen Schüler nicht zur Schule kommen.

c) Er sagt nicht immer die Wahrheit.

d) Es stimmt nicht, dass 21 durch 3 und 4 teilbar ist.

4.2. Wahrheitstabellen

Aufgabe 151: Lagerverwaltung

In einer Lagerverwaltung soll folgende Funktion erfüllt sein: Unterschreitet der aktuelle Lagerbestand den Minimalbestand, soll eine Bestellung ausgelöst werden, sofern keine Bestellung pendent ist.

A	B				
w	w				
w	f				
f	w				
f	f				

Aufgabe 152: Tagessicherung

Eine Tagessicherung auf Band darf nur dann ausgelöst werden, wenn an diesem Tag noch keine Sicherung gemacht wurde aber Änderungen der Daten vorgenommen wurden und ausreichend Speicherplatz auf dem Band zur Verfügung steht.

A	B	C										

Aufgabe 153: Zugriffsprüfung

Eine Zugriffsprüfung erlaubt den Schreibzugriff auf eine bestehende Datei nur dann, wenn sie kein anderer Anwender, welcher die Datei benutzt, die Schreibberechtigung hat sowie eine Lizenz für das Bearbeitungsprogramm verfügbar ist und die Datei im Arbeitsspeicher des betreffenden Computers Platz findet.

A	B	C	D									

Aufgabe 154: Wahrheitstabelle Fluglageüberwachungssystem

Das Fluglageüberwachungssystem des Autopiloten eines Airbus A-300 prüft ständig die Komponenten: Fluggeschwindigkeit, Höhenveränderung, Triebwerkschub und Stellung der Landeklappen. Stimmen die Werte der einzelnen Komponenten in gegenseitiger Abhängigkeit nicht überein, wird Stall-Alarm ausgelöst. Folgend die einzelnen Bedingungen:

Stall-Alarm wird ausgelöst:

- wenn die Fluggeschwindigkeit kleiner 300, der Triebwerkschub unter 50%, die Landeklappen nicht ausgefahren und die Sinkgeschwindigkeit unter 20 liegt

oder

- wenn die Fluggeschwindigkeit kleiner 300, der Triebwerkschub über 50%, die Landeklappen ausgefahren und die Sinkgeschwindigkeit mindestens bei 20 liegt

Erstellen Sie eine Wahrheitstabelle anhand folgender Aussagen, welche die oben stehende Situation abbildet:

Aussage A: Die Fluggeschwindigkeit ist kleiner 300.

Aussage B: Der Triebwerkschub ist unter 50%.

Aussage C: Die Landeklappen sind ausgefahren.

Aussage D: Die Sinkgeschwindigkeit liegt unter 20.

A	B	C	D																				
W	W	W	W																				
W	W	W	F																				
W	W	F	W																				
W	W	F	F																				
W	F	W	W																				
W	F	W	F																				
W	F	F	W																				
W	F	F	F																				
F	W	W	W																				
F	W	W	F																				
F	W	F	W																				
F	W	F	F																				
F	F	W	W																				
F	F	W	F																				
F	F	F	W																				
F	F	F	F																				

Aufgabe 155: Wahrheitstabelle Druckmanager

Erstellen Sie anhand folgender Problemstellung eine Wahrheitstabelle:

Der Druckmanager sendet ein zu druckendes Dokument zum Drucker, wenn dieser betriebsbereit und frei ist und sich kein anderes Dokument in der Druckerwarteschlange befindet oder das Dokument in der Druckerwarteschlange hat eine tiefere Druckpriorität.

Aussage A: Drucker ist betriebsbereit und frei.

Aussage B: Ein anderes Dokument befindet sich in der Druckerwarteschlange.

Aussage C: Das Dokument in der Druckerwarteschlange hat eine tiefere Druckpriorität.

A	B	C										

Aufgabe 156: Promotionsordnung

Ein Student hat die Diplomprüfung, bestehend aus 11 Einzelprüfungen mit individuellen Diplomprüfungsnoten bestanden, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

der Durchschnitt aller Diplomprüfungsnoten ist mindestens eine 4.0.

keine Diplomprüfungsnote ist tiefer als 2.5

höchstens drei Diplomprüfungsnoten dürfen unter 4.0 liegen

ist aber eine Diplomprüfungsnote unter 3.5, darf höchstens noch eine weiter Diplomprüfungsnote zwischen 3.5 und unter 4.0 liegen.

Erstellen Sie eine Wahrheitstabelle anhand oben stehenden Restriktionen, welche aussagt, ob ein Kandidat promoviert wird oder nicht.

A	B	C	D	E											
W	W	W	W	W											
W	W	W	W	F											
W	W	W	F	W											
W	W	W	F	F											
W	W	F	W	W											
W	W	F	W	F											
W	W	F	F	W											
W	W	F	F	F											
W	F	W	W	W											
W	F	W	W	F											
W	F	W	F	W											
W	F	W	F	F											
W	F	F	W	W											
W	F	F	W	F											
W	F	F	F	W											
W	F	F	F	F											
F	W	W	W	W											
F	W	W	W	F											
F	W	W	F	W											
F	W	W	F	F											
F	W	F	W	W											
F	W	F	W	F											
F	W	F	F	W											
F	W	F	F	F											
F	F	W	W	W											
F	F	W	W	F											
F	F	W	F	W											
F	F	W	F	F											
F	F	F	W	W											
F	F	F	W	F											
F	F	F	F	W											
F	F	F	F	F											

Teil XI Lösungen zu den Aufgaben

1. Lösungen zu den Aufgaben zu Zahlensystemen

1.1. Einführungsaufgaben zu Zahlensystemen

Lösung Aufgabe 1: Von BIN nach DEZ

Wandeln Sie folgende Binärzahl in eine Dezimalzahl um:

BIN 1010 0111 = **DEZ 167** ....

Lösung Aufgabe 2: Von DEZ nach BIN

Wandeln Sie folgende Dezimalzahl in eine Binärzahl um:

DEZ 1 993 = **BIN 111 1100 1001** ....

Lösung Aufgabe 3: Binärzahl zu Dezimalzahl

Wandeln Sie folgende Binärzahl in eine Dezimalzahl um:

BIN 111 1100 1110 = **DEZ 1 998** ....

Lösung Aufgabe 4: Dezimalzahl zu Binärzahl

Wandeln Sie folgende Dezimalzahl in eine Binärzahl um:

DEZ 999 = **BIN 11 1110 0111** ....

Lösung Aufgabe 5: Von HEX nach DEZ

Wandeln Sie folgende Hexadezimalzahl in eine Dezimalzahl um:

HEX 7D1 = **DEZ 2 001** ....

Lösung Aufgabe 6: Von DEZ nach HEX

Wandeln Sie folgende Dezimalzahl in eine Hexadezimalzahl um:

DEZ 2 730 = **HEX AAA** ....

Lösung Aufgabe 7: Addition Binärzahlen

Addieren Sie folgende beiden Binärzahlen:

BIN 110 0101 + 10 0111 = **BIN 1000 1100** ....

Lösung Aufgabe 8: Binäre Addition

Addieren Sie folgende Binärzahlen:

BIN 1011 1111 + BIN 110 1010 = **BIN 1 0010 1001** ....

Lösung Aufgabe 9: Subtraktion von Binärzahlen

Subtrahieren Sie folgende beiden Binärzahlen:

BIN 1101 1101 - 1101 0110 = **BIN 111** ....

1.2. Umwandlungen

Lösung Aufgabe 10: DEZ -> BIN

DEZ 233	=	**BIN 1110 1001**
DEZ 10'233	=	**BIN 10 0111 1111 1001**
DEZ 8'759	=	**BIN 10 0010 0011 0111**
DEZ 256	=	**BIN 1 0000 0000**

Lösung Aufgabe 11: BIN -> DEZ

BIN 111 0100	=	**DEZ 116**
BIN 100 0011	=	**DEZ 67**
BIN 1 0101 0101	=	**DEZ 341**
BIN 1 0111	=	**DEZ 23**

Lösung Aufgabe 12: DEZ -> HEX

DEZ 100	=	**HEX 64**
DEZ 2 378	=	**HEX 94A**
DEZ 33 479	=	**HEX 82C7**
DEZ 11	=	**HEX B**

Lösung Aufgabe 13: HEX -> DEZ

HEX 7D1	=	**DEZ 2 001**
HEX 8 235	=	**DEZ 33 333**
HEX 1F4	=	**DEZ 500**
HEX 1D 6EE	=	**DEZ 120 558**

Lösung Aufgabe 14: BIN -> HEX

BIN 1010 1010 1010	=	**HEX AAA**
BIN 11 0010	=	**HEX 32**
BIN 1111 0011	=	**HEX F3**
BIN 1 0001	=	**HEX 11**

Lösung Aufgabe 15: HEX -> BIN

HEX 1F	=	**BIN 1 1111**
HEX 40	=	**BIN 100 0000**
HEX 9	=	**BIN 1001**
HEX BAD	=	**BIN 1011 1010 1101**

1.3. Rechenoperationen

Lösung Aufgabe 16: Binäre Rechenoperationen

BIN 1 0111 0110 + BIN 1000 0101	=	**BIN 1 1111 1011**
BIN 1100 0101 1001 + BIN 1 1111	=	**BIN 1100 0111 1000**
BIN 11 0010 1011 - BIN 1001 1101	=	**BIN 10 1000 1110**
BIN 10 0100 1111 1101 - BIN 110 1101 1110	=	**BIN 1 1110 0001 1111**
BIN 1001 0101 * BIN 101	=	**BIN 10 1110 1001**
BIN 1 0110 * BIN 1100	=	**BIN 1 0000 1000**
BIN 1101 0101 / BIN 11	=	**BIN 100 0111**
BIN 11 1001 1011 / BIN 1101	=	**BIN 100 0111**

Lösung Aufgabe 17: Hexadezimale Rechenoperationen

HEX 5 F4A + HEX 17D	=	**HEX 60C7**
HEX 7 FF1 7CD + HEX A BCD	=	**HEX 7FF C39A**
HEX A 612 949 - HEX 34 81F	=	**HEX A5D E12A**
HEX 589 182 - HEX 32 7DA	=	**HEX 55 69A8**
HEX 76 25A * HEX 1D	=	**HEX D6 2432**
HEX 8 20A F19 * HEX F	=	**HEX 79EA 4277**
HEX 4B F0F / HEX 45	=	**HEX 119C**
HEX AE3 186 / HEX 11	=	**HEX A 3F26**

2. Lösungen zu den Aufgaben zur Mengenlehre

Lösung Aufgabe 18: Mengennotation (I)

(A ∩ D) ∪ (C \ B)

Lösung Aufgabe 19: Mengennotation (II)

(A \ B \ C \D \ E) ∪ (A ∩ B ∩ C) ∪ (D \ A \ C)

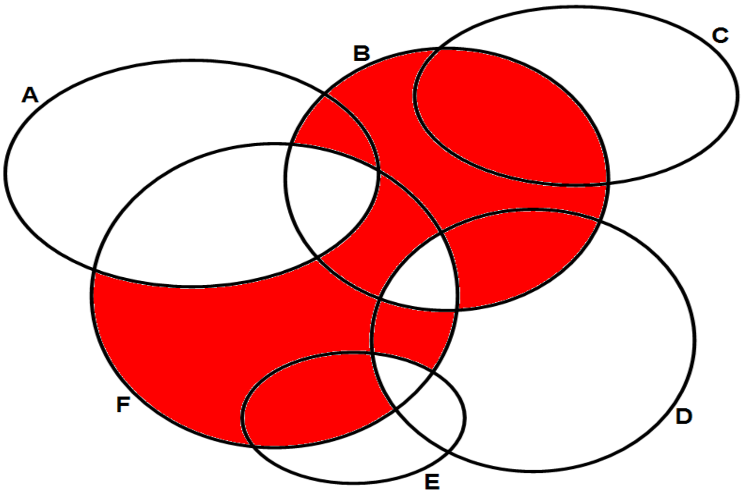
Lösung Aufgabe 20: Mengennotation (III)

(A ∩ C) ∪ (A ∩ D) ∪ (A ∩ E)

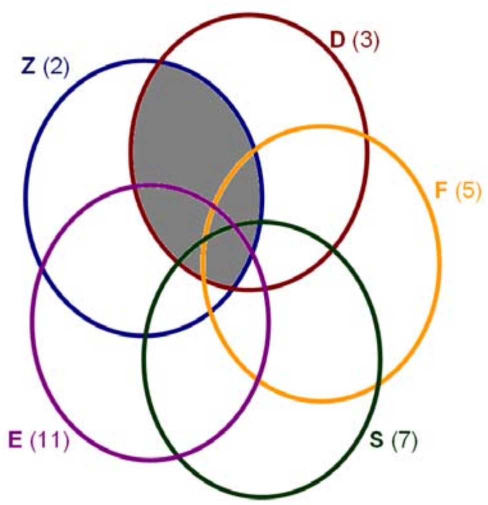
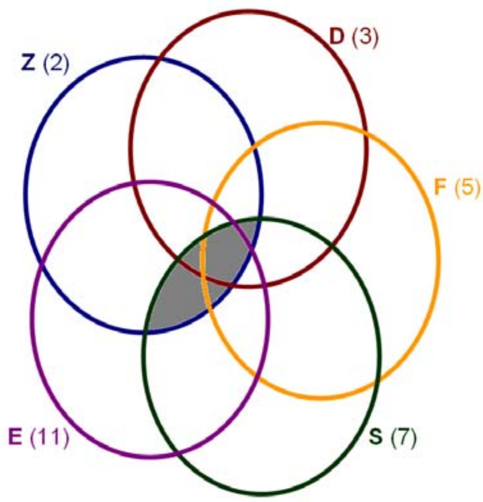
oder

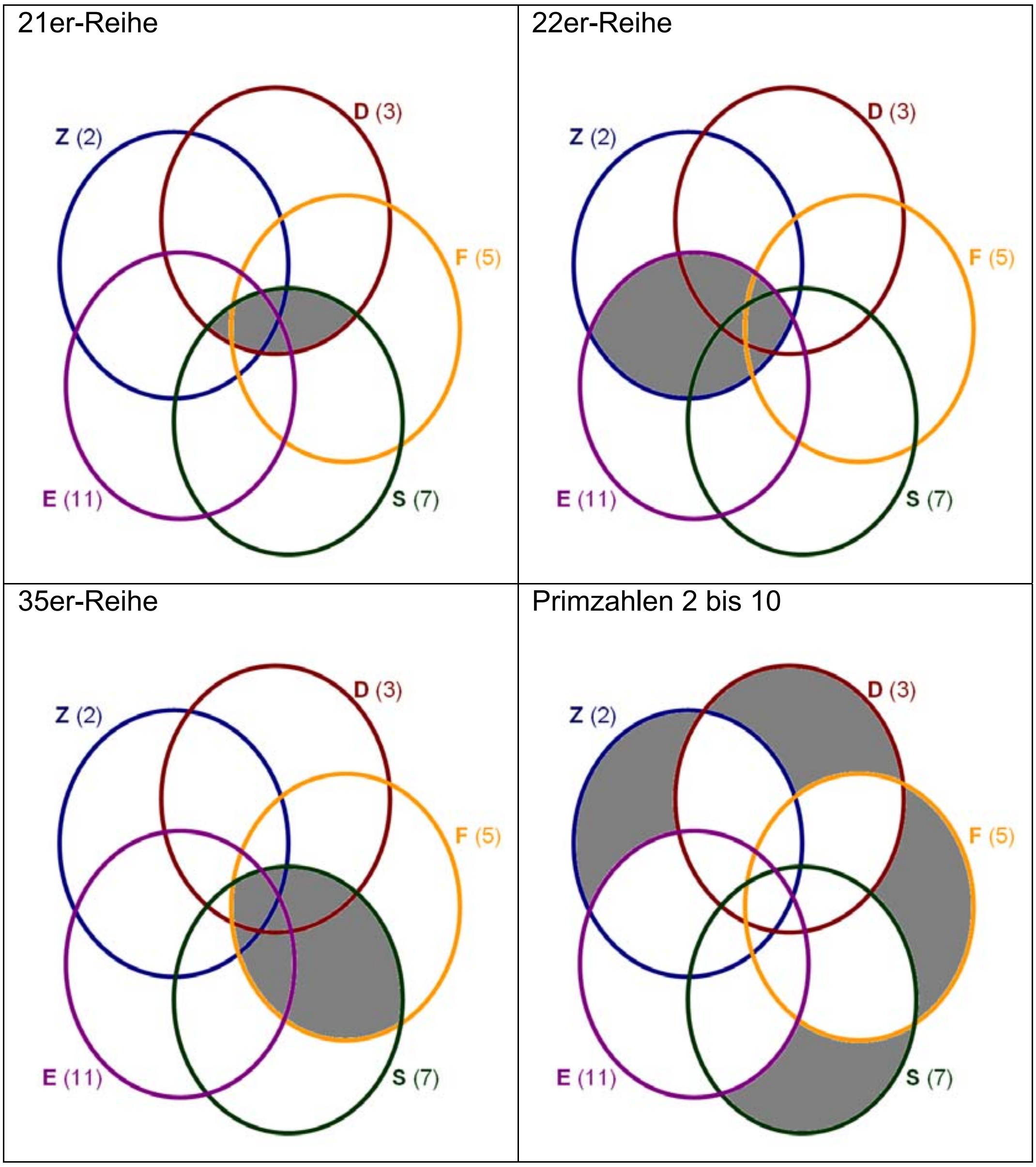
(C ∪ D ∪ E) ∩ A

Lösung Aufgabe 21: Mengendarstellung (I)



Lösung Aufgabe 22: Venn-Diagramme

6er-Reihe	14er-Reihe
	



Lösung Aufgabe 23: Mengenalgebra (I)

	Richtig	Falsch
a) $\lvert -7 \rvert \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$	☒	☐
b) $15 \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$	☐	☒
c) $15 \in \{1, 3, 5, 7, 9, ...\}$	☒	☐
d) $5 \notin \{2, 4\}$	☒	☐
e) $2 \notin \{2, 4\}$	☐	☒

Lösung Aufgabe 24: Mengenalgebra (II)

a) V := **{65}**

b) W := **Ø oder {}**

c) S := **{1; 3; 5; 7; 9}**

d) T := **{5; 10: 15; 20; …}**

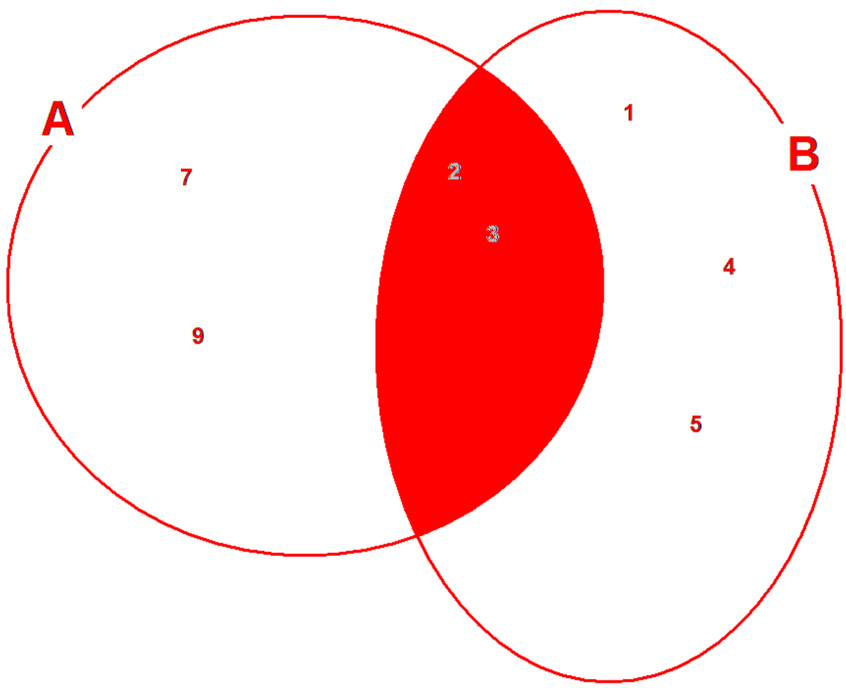
Lösung Aufgabe 25: Mengenalgebra (III)

K := **3** **Q := {1; 4; 9} => IQI = 3**

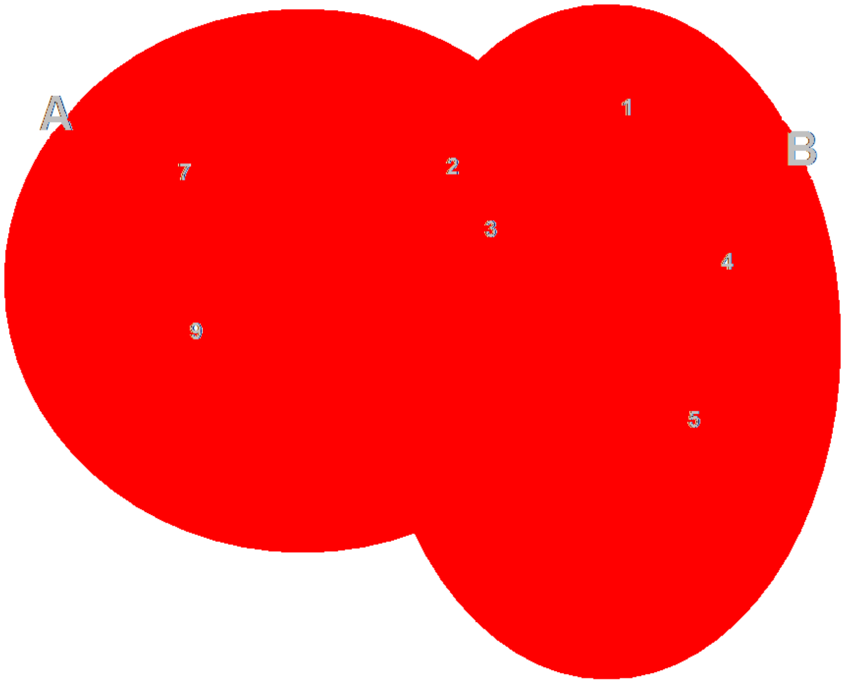
Lösung Aufgabe 26: Zahlenmengen

	Richtig	Falsch
a) $3 \in N$	☒	☐
b) $3 \in Z$	☒	☐
c) $3 \in Q$	☒	☐
d) $-3 \in N$	☐	☒
e) $-3 \in Z$	☒	☐
f) $-3 \in Q+$	☐	☒
g) $-½ \in Q+0$	☐	☒
h) $-½ \in Q$	☒	☐

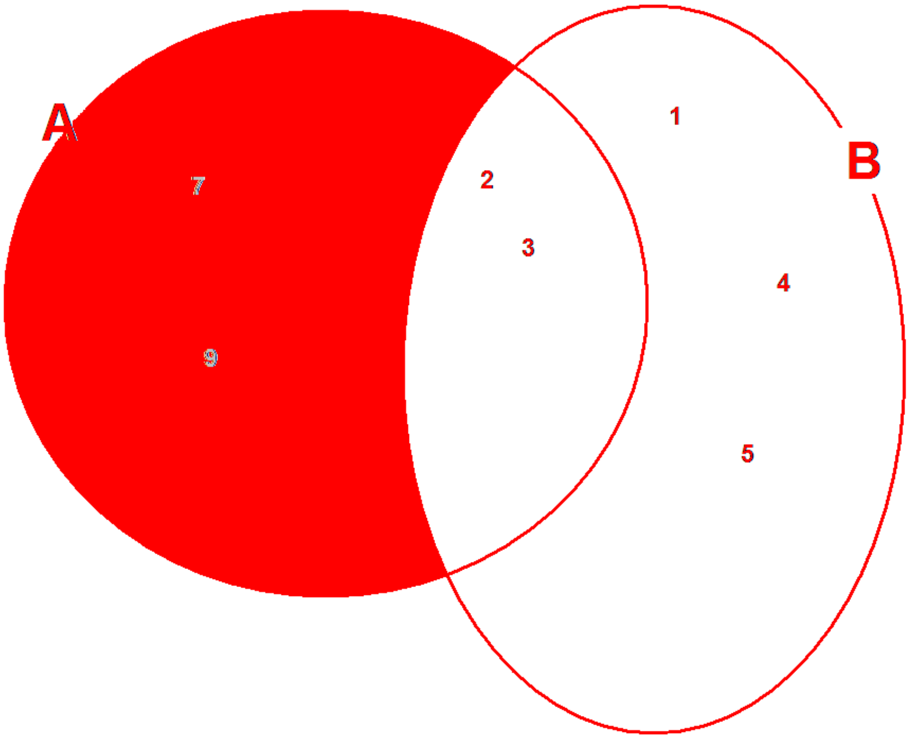
Lösung Aufgabe 27: Mengenalgebra (IV)



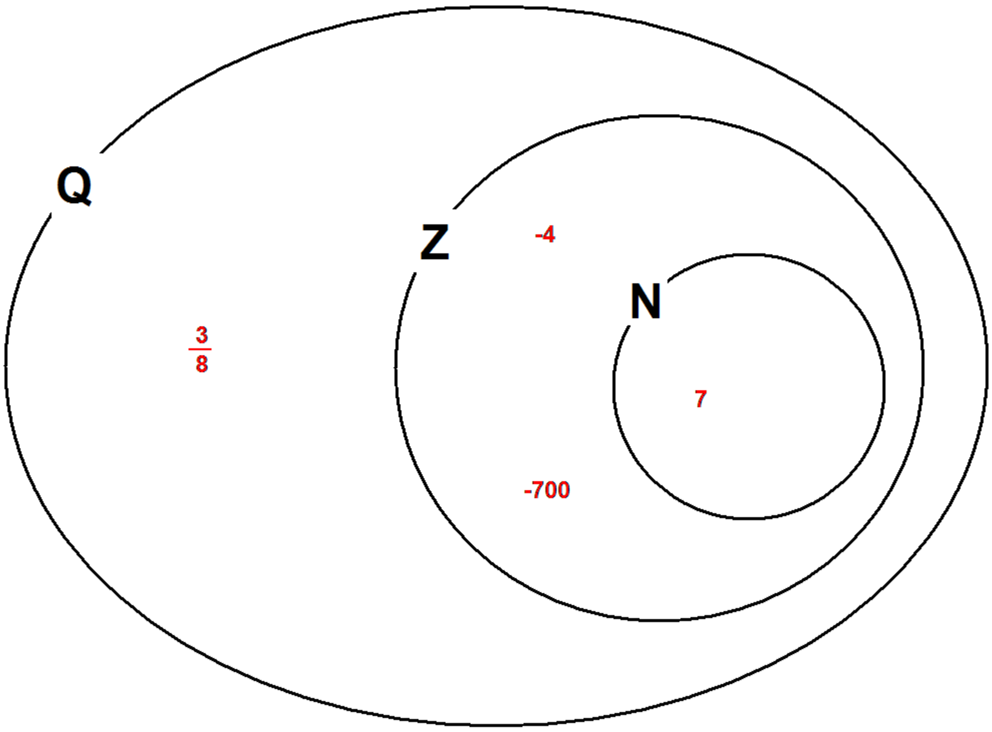
Lösung Aufgabe 28: Mengenalgebra (V)



Lösung Aufgabe 29: Mengenalgebra (VI)



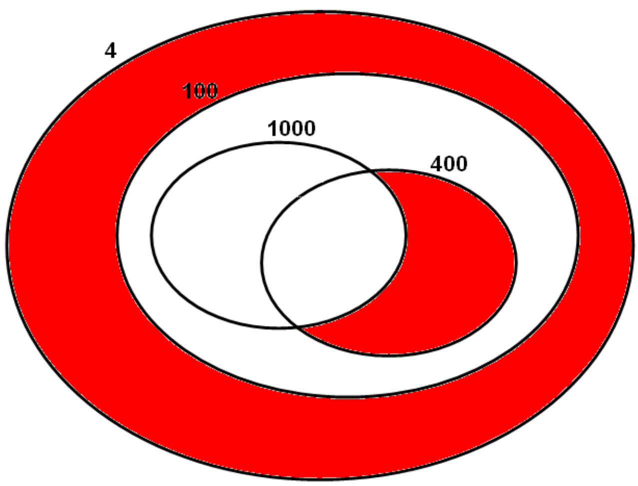
Lösung Aufgabe 30: Mengenalgebra (VII)



Lösung Aufgabe 31: Mengenalgebra (VIII)

	Richtig	Falsch
a) N ⊂ Z	☒	☐
b) N ⊂ Q+	☒	☐
c) Q+ ⊂ Z	☐	☒
d) Q+ ⊂ N	☐	☒
e) N0 ⊂ N	☐	☒
f) Z ⊂ Q	☒	☐

Lösung Aufgabe 32: Mengenalgebra (IX)

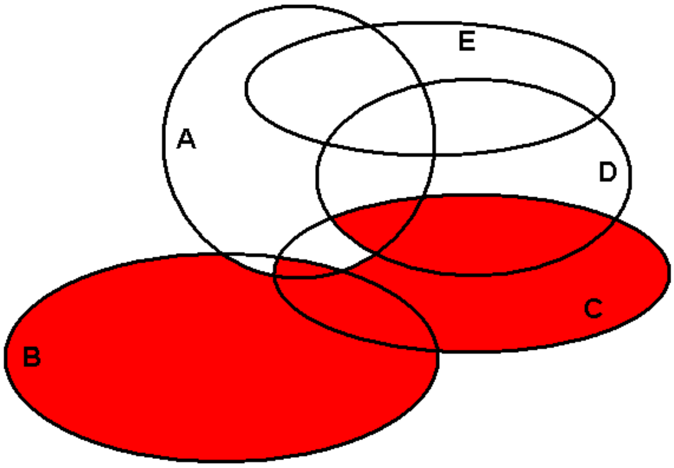


S = (M \ N) ∪ (O \ P)

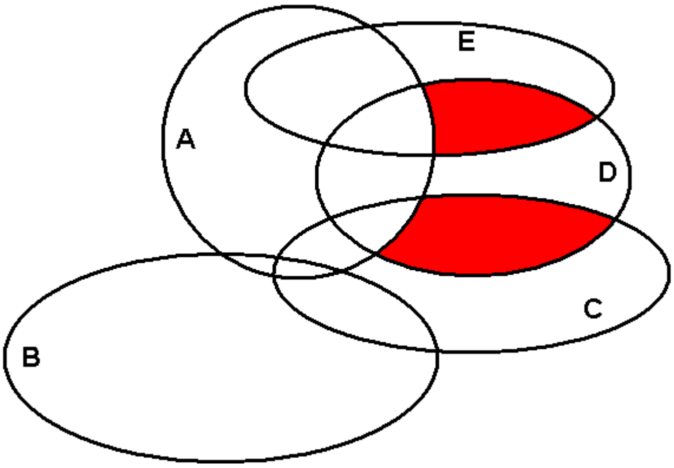
Lösung Aufgabe 33: Mengenalgebra (X)

((A ∪ E) \ (A ∩ E) \ B \ C \ D) ∪ (C ∩ D)

Lösung Aufgabe 34: Mengenalgebra (XI)



Lösung Aufgabe 35: Mengenalgebra (XII)



Lösung Aufgabe 36: Mengenalgebra (XIII)

(F \ E \ A \ D) ∪ ((A ∩ B) \ F) ∪ ((D ∩ F) \ B)

Lösung Aufgabe 37: Mengenalgebra (XIV)

((A ∩ F) \ B) ∪ ((A ∩ B) \ F) ∪ (C \ B) ∪ (D ∩ E ∩ F)

3. Lösungen zu den Aufgaben zur Algebra

Lösung Aufgabe 38: Addition, Subtraktion und Klammern

a) $20a + (3b - 2a) =$ **$20a + 3b - 2a = 18a + 3b$**

b) $20a - (3b + 2a) =$ **$20a - 3b - 2a = 18a - 3b$**

c) $20a - (3b - 2a) =$ **$20a - 3b + 2a = 22a - 3b$**

Lösung Aufgabe 39: Verschachtelte Klammern

a) $10a - [2a - (3b - 1b) + 5a]$
$= 10a - [2a - 3b + 1b + 5a]$
$= 10a - [7a - 2b]$
$= 10a - 7a + 2b$
$= 3a + 2b$

b) $25a - [(14a - 9b + 3c) - (9a + 13b)]$
$= 25a - [14a - 9b + 3c - 9a - 13b]$
$= 25a - [5a - 22b + 3c]$
$= 25a - 5a + 22b - 3c$
$= 20a + 22b - 3c$

Lösung Aufgabe 40: Multiplikation

a) $3 \cdot (-2) =$ **-6**

b) $(-3) \cdot (-2) =$ **6**

c) $2x \cdot (-4a) =$ **$-8ax$**

Lösung Aufgabe 41: Division

a) $-75/-5 =$ **15**

b) $\frac{30abn}{3b} =$ **$10an$**

c) $\frac{49cy}{14by} =$ **$7c / 2b$**

Lösung Aufgabe 42: Ausmultiplizieren – Addition und Multiplikation

a) $x + x * x + x =$ **$2x + x^2$**

b) $(x + x) * x + x =$ **$2x^2 + x$**

c) $x + x * (x + x) =$ **$2x^2 + x$**

d) $(x + x) * (x + x) =$ **$4x^2$**

Lösung Aufgabe 43: Ausdividieren – Addition und Division

a) $a + a : a + a =$ **$2a + 1$**

b) $(a + a) : (a + a) =$ **1**

c) $(a + a) : a + a =$ **$2 + a$**

d) $a + a : (a + a) =$ **$a + ½$**

Lösung Aufgabe 44: Ausmultiplizieren

a) c ● (a + b) = **ac + bc**

b) 2x ● (a - 3b) = **2ax – 6bx**

c) $(a + b)^2 = \mathbf{a^2 + 2ab + b^2}$

d) $(a - b)^2 = \mathbf{a^2 - 2ab + b^2}$

e) $(a + b) \cdot (a - b) = \mathbf{a^2 - b^2}$

f) (a + 3) • 6 = **6a + 18**

g) (n – 2m) • (3ab + b - c) = **3abn + bn – cn – 6abm – 2bm +2cm**

Lösung Aufgabe 45: Ausklammern

a) $10a^2z + 20ayz = \mathbf{10az * (a + 2y)}$

b) $\frac{az + bz}{z} = \mathbf{a + b}$

c) $\frac{30x - 6bx}{60c - 12bc} = \mathbf{x / 2c}$

Lösung Aufgabe 46: Bestimmen des Klammerausdrucks

a) -7x + 14xy = -7x • (…) **(1 - 2y)**

b) $ax^2 - 6x^3 = x^2 \cdot (...)$ **(a - 6x)**

c) $\frac{5}{3}a + 5a^2 - \frac{10}{3}a^3 = 5a \bullet (...)$ $(\frac{1}{3} + a - \frac{2}{3}a^2)$

Lösung Aufgabe 47: Potenzen

a) $9a^3$

b) $-10x^7$

Lösung Aufgabe 48: Logarithmen

a) $a = \frac{\log 81}{log3} = 4$

b) $x = \frac{log78125}{log5} = 7$

Lösung Aufgabe 49: Algebra Addition (I)

a) Die Summe 3a + 6a + 9a besteht aus **3** Summanden.

b) Beim Term 17z wird die Zahl 17 als **Koeffizient** bezeichnet.

c) Die Terme 5x; 3x; 27x sind ☒ gleichartig ☐ ungleichartig

d) In einer Addition kann man nur **gleichartige Terme** zu einem Term zusammenfassen

Lösung Aufgabe 50: Algebra Addition (II)

a) 7a + 9a + 4a = **20a**

b) 2xy + 3xy + 11xy = **16xy**

c) 1.3x + 0.6y + 2.7x + 0.1y + 10 = **4x + 0.7y + 10**

d) ¼ y + ½x + ¾y + 1.5 x + 3 = **2x + y + 3**

Lösung Aufgabe 51: Algebra Addition (III)

4a + 5b + 6a + 3b = **10a + 8b => (10 * 3) + (8 * 2) = 30 + 16 = 46**

10ab + 4bx + 5ax = **(10 * 3 * 2) + (4 * 2 * ½) + (5 * 3 * ½) = 60 + 4 + 7½ = 71½**

6x + 0,5a + ¼b = **(6 * ½) + (½ * 3) + (¼ * 2) = 3 + 1½ + ½ = 5**

Lösung Aufgabe 52: Algebra Addition (IV)

a) mit Variablen ausgedrückt: **U = 2z + z + 2 * 2½z = 8z**

b) mit z = 6 Meter **U = 8 * 6 Meter = 48 Meter**

Lösung Aufgabe 53: Algebra Subtraktion (I)

a) Die Terme einer Subtraktion heissen **Minuend** und **Subtrahend**.

b) In einer Subtraktion kann man nur **gleichartige** Terme zusammen verrechnen.

Lösung Aufgabe 54: Algebra Subtraktion (II)

a) 13a - 9a - a = **3a**

b) 52xy - 3xy - 19xy = **30xy**

c) 1,3x + 0,6y - 0,9x - 0,1y + 10 = **0.4x + 0.5y + 10**

d) ¼ y + ½x - ¾y - 0,5 x + 7 = **-½y + 7**

Lösung Aufgabe 55: Algebra Klammernrechnen

a) 20a + (3b – 2a) = **20a + 3b – 2a = 18a + 3b**

b) 20a – (3b + 2a) = **20a – 3b - 2a = 18a - 3b**

c) 20a – (3b – 2a) = **20a - 3b + 2a = 22a - 3b**

Lösung Aufgabe 56: Algebra Multiplikation

a) (a + 3) • 6 = **6a + 18**

b) (-x + 1.6y) • (-5) = **5x – 8y**

c) n • (3ab +b + c) = **3abn + bn + cn**

d) 8 • (x – y) + 11 • (x + y) = **(8x – 8y) + (11x + 11y) = 19x + 3y**

3.1. Kontrollaufgaben zur Division

Lösung Aufgabe 57: Algebra Division

a) $\frac{az + bz}{z} =$ **a + b**

b) $\frac{30x - 6bx}{60c - 12bc} =$ **x / 2c**

c) $\frac{4x}{7a}$ = **12bx / 21ab**

d) $\frac{11a}{-3b} = \frac{}{-18bc}$ = **66ac / -18bc**

e) $\frac{a + y}{2a} - \frac{a - y}{2a} =$ **y / a**

Lösung Aufgabe 58: Algebra Potenzen

a) $a^6 \cdot a^7 =$ **a^{13}**

b) $4a^3 \cdot 2a^4 =$ **$8a^7$**

c) $(a + b)^2 =$ **$a^2 + 2ab + b^2$**

d) $(a - b)^2 =$ **$a^2 - 2ab + b^2$**

e) $(a + b) \cdot (a - b) =$ **$a^2 - b^2$**

f) $(4c - 9d)^2 =$ **$16c^2 - 36cd - 36cd + 81d^2 = 16c^2 - 72cd + 81d^2$**

g) $(x^2 - 9) \cdot (x^2 + 9) =$ **$x^4 - 81$**

h) $(a - b - c)^2 =$ **$(a - b - c) * (a - b - c) = a^2 - ab - ac - ab + b^2 + bc - ac + bc + c^2 =$**
$a^2 - 2ab - 2ac + b^2 + 2bc + c^2$

i) $(x - 9) \cdot (x - 4) =$ **$x^2 - 4x - 9x + 36 = x^2 - 13x + 36$**

Lösung Aufgabe 59: Algebra Logarithmen

a) $\frac{\log_{10} 125}{\log_{10} 5} = 3$

b) $\frac{\log_{10} 16'777'216}{\log_{10} 8} = 8$

c) $\frac{\log_{10} 161'051}{\log_{10} 11} = 5$

d) $\frac{\log_{10} 256}{\log_{10} 2} = 8$

Lösung Aufgabe 60: Algebra (I)

a) $178x + 89n + 120x + 60x + 17n =$ **$2 * (179x + 53n)$**

b) $55c - 62d - 28c + 46d =$ **$27c - 16d$**

c) $(84a - 29x) - (73a - 125x) =$ **$84a - 29x - 73a + 125x = 11a + 96x$**

d) $16a \cdot (-7b) \cdot (-3c) =$ **$-112ab * (-3c) = 336abc$**

e) $(6a + 2b) \cdot (9 - x) =$ **$54a - 6ax + 18b - 2bx = 2 * (27a - 3ax + 9b - bx)$**

f) $(3a + 4) \cdot (b - 11) =$ **$3ab - 33a + 4b - 44$**

g) $4a^4 + 3a^4 + 2a^8 + 10a^8 =$ **$7a^4 + 12a^8 = a^4 * (7 + 12a^4)$**

h) $9a^2b^2c - (5a^2b^2c - 3a^2b^2c + 6a^2b^2c) + 7 =$ **$9a^2b^2c - 8a^2b^2c + 7 = a^2b^2c + 7$**

i) $26p - 19p - 3p =$ **$4p$**

Lösung Aufgabe 61: Preisdifferenz Projektkosten

x = Kostensatz Firma A

y = Kostensatz Firma B

Preisunterschied = 2'380 * (x – y)

Lösung Aufgabe 62: Algebra (II)

a) $a^3 \bullet a^2 =$ **a^5**

b) $3a^4 \bullet 2a^5 =$ **$6a^9$**

c) $64a^2c^3 + 56a^3c^2 =$ **$8a^2c^2 * (8c + 7a)$**

d) $4a^3b^2 – 12a^2b^3 – 16ab^2 =$ **$4ab^2 * (a^2 - 3ab - 4)$**

e) $\frac{15an}{-3b} =$ **5an / -b**

f) -25/-5 = **5**

g) $\frac{49ax}{7bx} =$ **7a / b**

h) $\frac{ax + bx}{x} =$ **a + b**

Lösung Aufgabe 63: Algebra (III)

a) $\frac{15x - 6bx}{20c - 8bc} =$ **3x / 4c**

b) Erweitern Sie $\frac{4x}{3a}$ auf den Nenner 21ab = **28bx / 21ab**

c) $\frac{7a}{-3b} = \frac{\quad}{-21bc}$ = **49ac / -21bc**

d) $\frac{x + y}{2a} - \frac{x - y}{2a} =$ **y / a**

e) $\frac{3x}{6} + \frac{5x}{9} =$ **19x / 18**

f) $\frac{6x}{bx} \bullet \frac{bc}{18x} =$ **c / 3x**

g) $\frac{a + b}{4x + 4y} \bullet \frac{5x + 5y}{a - b} =$ **(5 * (a + b)) / (4 * (a – b))**

h) $\frac{144abx}{3c} \div 12ax =$ **4b / c**

i) $\frac{a}{a + b} \div \frac{x}{a + b} =$ **a / x**

j) $\frac{(8ac - 4adx - a)}{2a} =$ **4c – 2dx – ½**

k) $\frac{18ax}{(9ac - 36ad + 18ax)} =$ **2x / (c – 4d + 2x)**

Lösung Aufgabe 64: Algebra (IV)

a) (-15a) + (-14a) = **- 29a**

b) 3a * (a + 5c) = **$3a^2$ + 15ac**

c) a * ab = **a^2b**

d) -5s - (-12s) - 8s = **-s**

e) 4a + 4b + 3 + a = **5a + 4b +3**

f) -3a - 5a + (-7c) - c = **–8a – 8c = –8 * (a+c)**

g) 2a - (5b - a) = **3a – 5b**

h) 3 * b * -7 * b * 5 = **$-105b^2$**

i) (-3x) * ($-2y^3$) * 4 – 6 = **$24xy^3$ - 6 = 6 * ($4xy^3$ - 1)**

j) ba * a * b = **$(ab)^2$ oder a^2 * b^2**

k) uw * uw = **$(uw)^2$ oder u^2 * w^2**

l) ausklammern: $10a^2z$ + 20ayz = **10az * (a + 2y)**

m) (15xy + 55xy) : 5x = **14y**

n) 15a – 3 * (x + 5a) = **-3x**

o) (p^2qc + pr) : p = **pqc + r**

p) 13x – 7 * (2 + 3x) = **-14 – 8x**

Lösung Aufgabe 65: Algebra (V)

Vereinfachen Sie folgende Terme:

a) 18a - 3x + 6a - 3 • (x + a) - 5 • (a - 2x) = **16a + 4x = 4 • (4a + x)**

b) 15ax + 3ax - 7a • (-2x) = **32ax**

c) 2 • 4a • 3b + 5a • 2b - 18ab = **16ab**

d) -3 • (x^2 - x) + (x^2 -2x + 3) • (-2) = **$-5x^2 + 7x - 6$**

e) 6.5x - [5x - x • (3 - 4x) + 2] • (-0.5) = **$7.5x + 2x^2 + 1$**

f) x - 5x • (x^2 - 3x) • (-4) - $5x^2$ = **$20x^3 - 65x^2 + x$**

g) 5 • (2x - ax) - 5 • 4x - 5ax = **-10x - 10ax = -10x • (1 + a)**

h) (2 - 3x) • x - x • (-14) = **$-3x^2 + 16x$**

i) 1.05 • (x + x • 1.05) + 1.05^2 • x = **3.255x**

j) $-\frac{a^2}{2} - \left(\frac{3}{2}a\right)^2 + \frac{1}{4} \bullet (2 - 2a^2) =$ $\frac{1}{2} - \frac{13a^2}{4}$

Lösung Aufgabe 66: Algebra (VI)

Bestimmen Sie jeweils den Klammerausdruck:

a) -7x + 14xy = -7x • (…) **(1 - 2y)**

b) $ax^2 - 6x^3 = x^2$ • (...) **(a - 6x)**

c) $\frac{5}{3}a + 5a^2 - \frac{10}{3}a^3 = 5a \bullet (...)$ $(\frac{1}{3} + a - \frac{2}{3}a^2)$

d) 1.5a - 2.5ab + $0.5a^2$ = 0.5a • (...) **(3 - 5b + a)**

3.2. Lösungen Aufgaben Aussagen und Aussageformen

Lösung Aufgabe 67: Gleichungen

a)	4x + 3 = 7 + 3x x + 3 = 7 x = 4	-3x -3
b)	4x - 1 = 2x + 9 2x - 1 = 9 2x = 10 x = 5	-2x +1 :2
c)	x/3 - 1 = 3 x - 3 = 9 x = 12	●3 +3
d)	x/3 - 1 = x/2 x - 3 = 3x/2 2x - 6 = 3x -x - 6 = 0 -x = 6 x = -6	●3 ●2 -3x +6 ●-1

Lösung Aufgabe 68: Gleichungssysteme

Lösung Aufgabe 69: Gleichungssysteme

a) Gleichsetzungsverfahren

2x – 7 = -3x + 3 5x – 7 = 3 5x = 10 **x = 2**	+ 3x + 7 : 5
y = 2x – 7 y = 2 ● 2 – 7 **y = -3**	für x „2“ einsetzen vereinfachen

b) Einsetzungsverfahren

3x – 5y = 21 3 ● (2y + 8) – 5y = 21 6y + 24 – 5y = 21 y + 24 = 21 **y = -3**	für x „2y + 8“ einsetzen ausmultiplizieren vereinfachen -24
x = 2y + 8 x = 2 ● -3 + 8 **x = 2**	für y „-3“ einsetzen vereinfachen

c) Additionsverfahren

$-2x + 3y = -13$ $-4x + 6y = -26$	● 2 (bei zweiter Gleichung)
$4x + 5y = -7$ $\underline{-4x + 6y = -26}$ $0x + 11y = -33$ $11y = -33$ **$y = -3$**	 spaltenweise addieren vereinfachen : 11
$-2x + 3y = -13$ $-2x + 3 \bullet -3 = 13$ $-2x – 9 = 13$ $-2x = 22$ **$x = -11$**	für y „-3“ einsetzen vereinfachen + 9 : -2

Lösung Aufgabe 70: Textaufgabe „Alter“ (1)

v = Alter des Vaters in Jahren

s = Alter des Sohnes in Jahren

m = Alter der Mutter in Jahren

I) $v + 3 = 40$

II) $v + s = m + 7$

III) $m + (s + 5) / 2 = v$

I)	$v + 3 = 40$ **$v = 37$**	-3
II)	$v + s = m + 7$ $37 + s = m + 7$ $30 + s = m$	Wert v einsetzen -7
III)	$m + (s + 5) / 2 = v$ $m + (s + 5) / 2 = 37$ $2 \bullet m + s + 5 = 74$ $2 \bullet m + s = 69$	Wert v einsetzen ●2 -5

Einsetzungsverfahren II in III

III)	$2\ (30 + s) + s = 69$ $60 + + s = 69$ $60 + 3 \bullet s = 69$ $3 \bullet s = 9$ **$s = 3$**	ausmultiplizieren vereinfachen -60 :3
II)	$30 + s = m$ $30 + 3 = m$ **$m = 33$**	Wert s einsetzen vereinfachen

Lösung Aufgabe 71: Textaufgabe „Alter“ (2)

a = heutiges Alter von Anja in Jahren

b = heutiges Alter von Bettina in Jahren

m = heutiges Alter der Mutter in Jahren

v = heutiges Alter des Vaters in Jahren

I) $a = b$

I) $m + v = 62$

II) $2 \bullet b + 18 = m$

II) $9 \bullet a = v$

heutiges Alter von Bettina:	b = 4 Jahre
heutiges Alter von Anja:	a = 4 Jahre
heutiges Alter der Mutter:	m = 26 Jahre
heutiges Alter des Vaters:	v = 36 Jahre

Lösung Aufgabe 72: Textaufgabe „Zahlen und Ziffern“ (1)

Eine zweistellige Zahl hat die Quersumme von 11. Kehrt man die Ziffern um, erhält man eine neue Zahl, welche ebenfalls die Quersum-me von 11 hat, aber um 7 mehr als das doppelte der Ursprungszahl höher ist als die Ursprungszahl. Wie lautet die Ursprungszahl?

e = Einerstelle der gesuchten Zahl

z = Zehnerstelle der gesuchten Zahl

I) $e + z = 11$

II) $(e + 10z) \bullet 2 + 7 = 10e + z$

I)	$e + z = 11$	-z
	$e = 11 - z$	-7

Einsetzungsverfahren I in II

II)	$((11 – z) + 10z) \bullet 2 + 7 = (11 – z) \bullet 10 + z$	e durch (11 – z) ersetzen
	$((11 – z) + 10z) \bullet 2 + 7 = (11 – z) \bullet 10 + z$	vereinfachen/ausmultiplizieren
	$29 + 18z = 110 – 9z$	+9z
	$29 + 27z = 110$	-29
	$27z = 81$	:27
	z = 3	

I)	$e = 11 - z$	Wert z einsetzen
	$e = 11 - 3$	vereinfachen
	e = 8	

Die gesuchte Zahl ist 38

Lösung Aufgabe 73: Textaufgabe „Zahlen und Ziffern“ (2)

z = Zehnerstelle der gesuchten Zahl
e = Einerstelle der gesuchten Zahl

I. $z + e = 8$

II. $10z + e + 18 = 10e + z$

z = 3

e = 5

gesuchte Zahl = 35

Lösung Aufgabe 74: Textaufgabe „Mischverhältnisse“ (1)

x = Anzahl Liter 50%-ige Schwefelsäure

y = Anzahl Liter 58%-ige Schwefelsäure

I) x + 20 = y

II) 20 ● 0.8 + x ● 0.5 = y ● 0.58

Einsetzungsverfahren I in II

II)	20 ● 0.8 + x ● 0.5 = y ● 0.58	y durch (x + 20) ersetzen
	20 ● 0.8 + x ● 0.5 = (x + 20) ● 0.58	vereinfachen/ausmultiplizieren
	16 + 0.5x = 0.58x + 11.6	-0.5x
	16 = 0.08x + 11.6	-11.6
	4.4 = 0.08x	:0.08
	x = 55	

I)	x + 20 = y	Wert von x einsetzen
	55 + 20 = y	vereinfachen
	y = 75	

Lösung Aufgabe 75: Textaufgabe „Mischverhältnisse“ (2)

x = Anzahl Liter 30%

10 * 0.8 + x * 0.3 = (10 + x) * 0.5
8 + 0.3x = 5 + 0.5x
3 = 0.2x
15 = x

Lösung Aufgabe 76: Textaufgabe „Gefässe und Rohre“ (1)

x = Anzahl Stunden bis das Bassin voll ist

x/6 + x/2 + x = 1	●6
x + 3x + 6x = 6	vereinfachen
10x = 6	:10
x = 0.6h => 36 Minuten	

Lösung Aufgabe 77: Textaufgabe „Gefässe und Rohre“ (2)

x = Anzahl Stunden bis Wanne voll ist

1/3x + 1/2x + 1/1.5x = 1
3x + 4.5x + 6x = 9
13.5x = 9

x = 0.667h = 40 Minuten

Lösung Aufgabe 78: Textaufgabe „Zeiten und Strecken“ (1)

x = Wanderzeit Wanderer 1 in Stunden

x ● 5 = (x – 0.5) ● 7.5	ausmultiplizieren
5x = 7.5x – 3.75	-7.5x
-2.5x = -3.75	:-2.5
x = 1.5h	

Die Wanderer treffen sich um 11:30 Uhr

Lösung Aufgabe 79: Textaufgabe „Zeiten und Strecken“ (2)

x = Zeit in Stunden, welche Wanderer B unterwegs ist

$5x + 1/3 = 6x$
$x = 5/3$ Stunden

Wanderer A ist 5/3 Stunden + 20 Minuten unterwegs = 120 Minuten

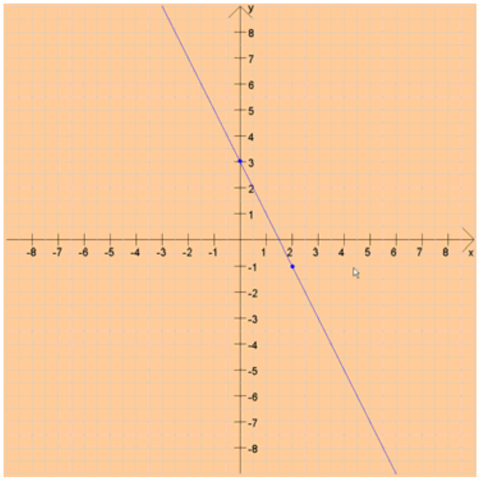
3.3. Lösungen Aufgaben Lineare Funktionen

Lösung Aufgabe 80: Steigung und Versatz

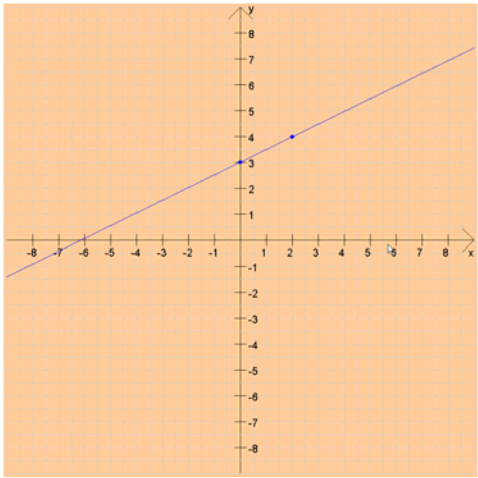
a)	$6x + 3y - 1/2 = 0$	-2	+1/6
b)	$5x - 2/3\,y + 6/5 = 0$	+7½	+1.8
c)	$1{,}2x + 2{,}4y + 0{,}5 = 0$	-½	-5/24

Lösung Aufgabe 81: Funktionsgraphen

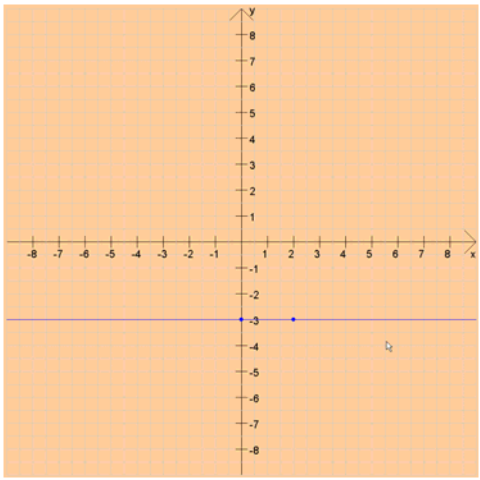
a) $y = -2x + 3$



b) $y = \frac{1}{2}x + 3$



c) $y = -3$



Lösung Aufgabe 82: Funktionsbestimmung

a) Punkte (1;-3) und (3:-1) y = x - 4

b) Punkte (3;7) und (-2;3) y = 0.8x + 4.6

c) Punkte (4;-3) und (2;-3) y = -3

Lösung Aufgabe 83: Funktion aus Grafik

a) y = 3x – 4

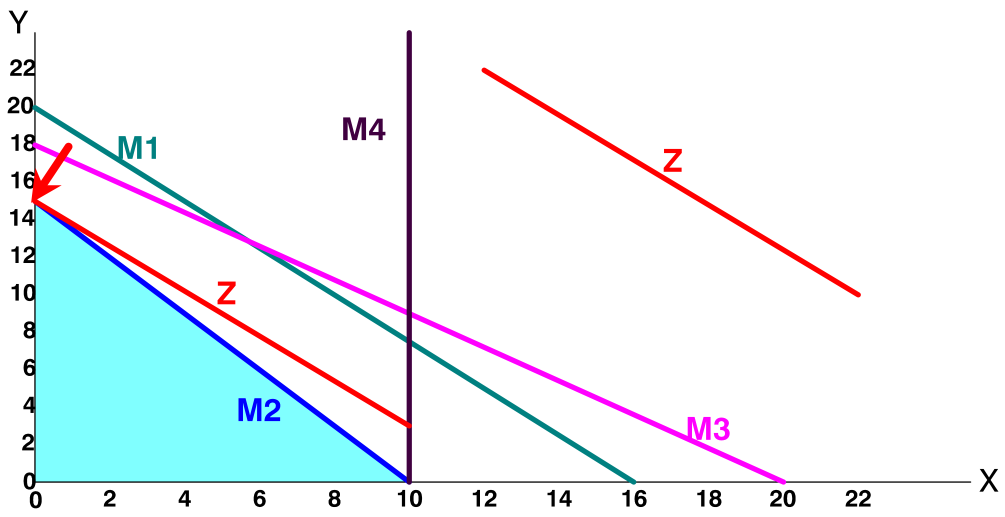
i) y = - 2/3 x + 2

g) y = 2,5

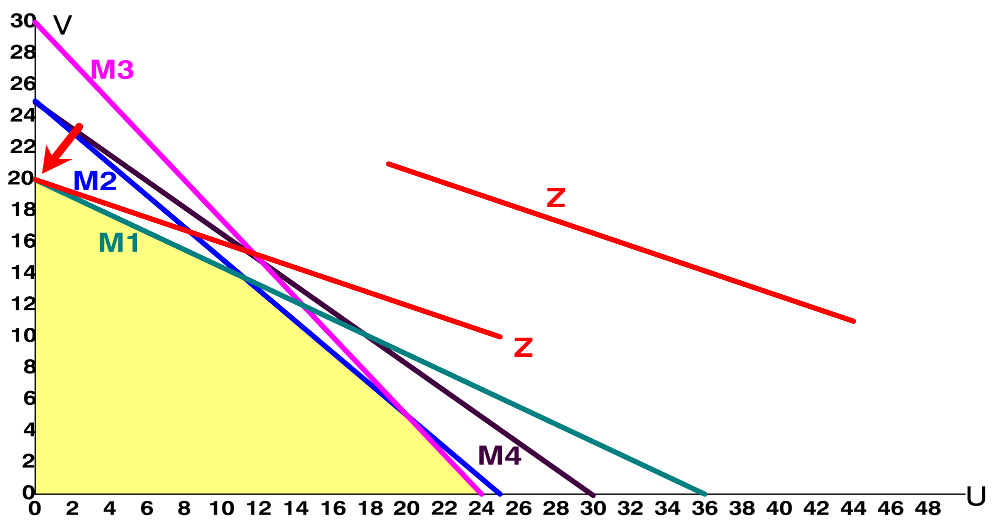
Lösung Aufgabe 84: Schnittpunkte von Funktionen

a) y = 3x + 4	y = -2x + 14	S (2;10)
g) y = 1/2 x + 3/2	y = 1/2	S (-2 | ½)
d) y = 7x - 14	y = 7x - 3	Geraden verlaufen parallel und haben keinen Schnittpunkt

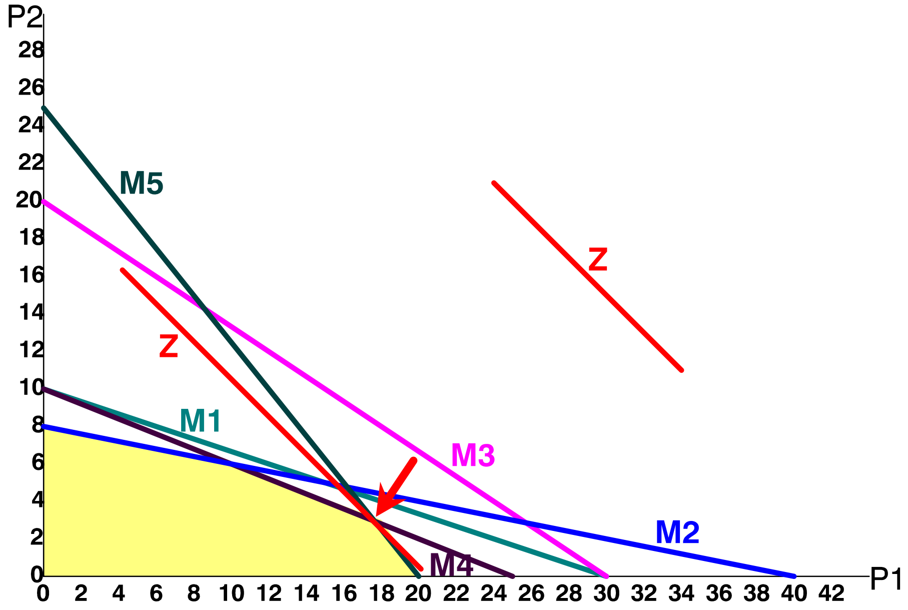
Lösung Aufgabe 85: Optimales Produktionsprogramm (1)



Lösung Aufgabe 86: Optimales Produktionsprogramm (2)



Lösung Aufgabe 87: Optimales Produktionsprogramm (3)

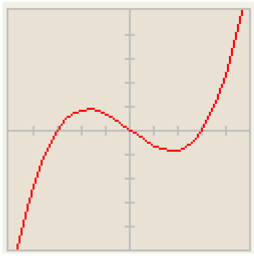


3.4. Lösungen Aufgaben Exponentialfunktionen

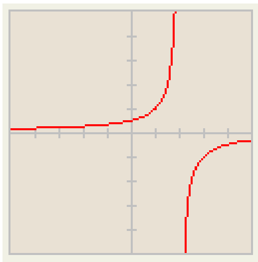
Lösung Aufgabe 88: Graphen zu Exponentialfunktionen

a) $y = x^2 - 2$

c) $y = x \bullet (x^2 - 9) / 12$



i) $y = 1 / (2 - x)$



Lösung Aufgabe 89: Seerosen auf einem Teich

Zur Abdeckung einer Fläche von 6'561m^2 (=65'610'00cm^2) benötigt es 131'220 Seerosen (65'610'000/500).

n = Anzahl Vermehrungsperioden à 4 Tage

$$20 \bullet 3^n = 131'220$$

$$3^n = 6'561$$

$$n = \frac{\log 6'561}{\log 3} = 8$$

Es werden 8 Perioden à 4 Tage oder 32 Tage benötigt, bis der Teich voll überwachsen ist.

Lösung Aufgabe 90: Wachstumsprozess

Da 20% dasselbe ist wie ein Fünftel (0.2), wächst die Zahl der Viren während jeder Stunde um den Faktor 1+0.2= 1.2. Zur Zeit t (in Stunden gemessen) befinden sich $500 \bullet 1.2^t$ Viren im befallenen Organismus (wobei diese Formel natürlich nur so lange gilt, wie das exponentielle Wachstum anhält).

Nach 5 Stunden befinden sich also $500 \bullet 1.2^5$ = 1'244 Viren im Organismus.

Lösung Aufgabe 91: Absorption

Nach einem Zentimeter ist die Intensität um den Faktor 1 - 0.05 = 0.95 gesunken. Bei einer Eindringtiefe x (in Zentimetern gemessen) beträgt die

Intensität(x) = $\text{Intensität}_0 \cdot 0.95^x$,

wobei I_0 die Intensität des einfallenden Lichts ist. Bei einem 7cm dicken Glas ergibt dies

$I_0 \cdot 0.95^7 = 0.6983$, d.h. die Intensität wird durch die Glasscheibe (ungefähr) um den Faktor 0.7 (d.h. auf 70% ihres ursprünglichen Werts) abgeschwächt.

3.5. Lösungen Aufgaben Finanzmathematik

3.5.1. Marchzinsrechnung

Lösung Aufgabe 92: Marchzinsberechnung

20000 + 20000 * 0.0425 * 167 / 360 = 20394.-

Lösung Aufgabe 93: Zinssatzberechnung Marchzinsen

75%

Lösung Aufgabe 94: Zinssatzberechnung Anlageanteile

x = Anlageteil zu 6%

14'700-x = Anlageteil zu 5%

Gleichung:

x * 0.06 + (14'700-x)*0.05 = 820

x = 8'500

Anlageteil zu 6% = CHF 8'500.-

Anlageteil zu 5% = CHF 6'200.-

Lösung Aufgabe 95: Zinssatzberechnung Knacknuss

CHF 122‘080.-

Lösung Aufgabe 96: Berechnung Endkapital

Endkapital = 61'000 * 1.0575^5 = 80'673.65

Lösung Aufgabe 97: Berechnung Jahreszinssatz

100 * $(1+i)^{40}$ = 400

$$i = \left(\frac{400}{100}\right)^{\frac{1}{40}} - 1$$

i = 35‰

Lösung Aufgabe 98: Berechnung Anlagedauer

$$n = \frac{\log(\frac{K_n}{K_0})}{\log(1+i)} = \frac{\log(\frac{800}{400})}{\log(1.04)} = \frac{\log(2)}{\log(1.04)} = 17\tfrac{2}{3}\,\text{Jahre}$$

Lösung Aufgabe 99: Nachfälliges Darlehen (I)

Zins: CHF 234.- (162 Tage Marchzins)

Rückzahlungsbetrag: CHF 8'234.-

Lösung Aufgabe 100: Nachfälliges Darlehen (II)

20000 + 20000 * 0.0425 * 167 / 360 = 20394.-

Lösung Aufgabe 101: Nachfälliges Darlehen (III)

Tage: 30.12.2003 bis 15.10.2004 = 285 Tage

Marchzins = 28'500 * 0.085 * 285 / 360 = 1'917.80

Lösung Aufgabe 102: Anlagedauer

0.83333 Jahre = 300 Tage

Lösung Aufgabe 103: Zinssatz

75%

Lösung Aufgabe 104: Kapitaleinsatz

13'500.-

Lösung Aufgabe 105: Zinsertrag

1'197.92

Lösung Aufgabe 106: Nachfälliges Darlehen (IV)

Zeit = 277 Tage

Zins = 280'000 * 0.0525 * 277 / 360) 11’311

Endkapital = 280'000 + 11'311 = 291’311

Lösung Aufgabe 107: Anlagevarianten

x = Anlageteil zu 6%

14'700-x = Anlageteil zu 5%

Gleichung:

x * 0.06 + (14'700-x)*0.05 = 820

x = 8'500

Anlageteil zu 6% = CHF 8'500.-

Anlageteil zu 5% = CHF 6'200.-

3.5.2. Zinseszinsrechnung

Lösung Aufgabe 108: Zinseszinsen (I)

Endkapital = 61'000 * 1.0575^5 = 80'673.65

Lösung Aufgabe 109: Jahreszinssatz

100 * $(1+i)^{40}$ = 400

$$i = \left(\frac{400}{100}\right)^{\frac{1}{40}} - 1$$

i = 35‰

Lösung Aufgabe 110: Anlagebetrag

x = Anfangsbetrag

x • 1.0525^4 = 10'000

x = CHF 8'149.15

Lösung Aufgabe 111: Anlagedauer

$$n = \frac{\log(\frac{K_n}{K_0})}{\log(1+i)} = \frac{\log(\frac{800}{400})}{\log(1.04)} = \frac{\log(2)}{\log(1.04)} = 17\tfrac{2}{3}\,\text{Jahre}$$

Lösung Aufgabe 112: Zinseszinsen (II)

a) $i = \left(\frac{K_n}{K_0}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 = 0.116 = 11.6\%$

b) $K_n = K_0 * (1+i)^n = 1'500 * 1.116^{10} = 4'499.07$

Lösung Aufgabe 113: Zinseszinsen (III)

13'426.25

3.5.3. Annuität

Lösung Aufgabe 114: Endwerte

a) 883.26

b) 1'468.19

c) 849.29

d) 1'434.21

Lösung Aufgabe 115: Rentenkapital

a) 9'490.43

Io	10'000	CHF
n	4	Jahre
i	4%	
Bezug pro Jahr	500	vorschüssig

shflow

	Cashflow	Faktor	Barwert	
Barwert Rentenkapital	10'000	1.000	10'000	
Barwert des Bezugs Jahr 1 vorschüssig	-500	1.000	-500	
Barwert der Bezüge Jahre 2 bis 4 vorschüssig	-500	2.775	-1'388	Rentenbarwertfaktor für 3 Jahre nachschüssig!
Barwert des Renten-kapitals nach Bezügen			8'112	
Endwert des Renten-kapitals nach Bezügen	8'112	0.855	**9'490**	

	Cashflow	Faktor	Endwert	
Endwert der vorschüssigen Bezügen	-500	3.775	-2'208	
Endwert des Rentenkapitals	10'000	1.170	11'699	Faktor = (1+i)^4
			9'490	

Nachweis Endwert der vorschüssigen Bezüge		Cashflow	Zins
	0	500	585
	1	500	562
	2	500	541
	3	500	520
	4		-
			2'208

b) 9'575.35

Io	10'000	CHF
n	4	Jahre
i	4%	
Bezug pro Jahr	500	vorschüssig

shflow

	Cashflow	Faktor	Barwert	
Barwert Rentenkapital	10'000	1.000	10'000	
Barwert der Bezüge Jahre 2 bis 4 vorschüssig	-500	3.630	-1'815	Rentenbarwertfaktor für 4 Jahre nachschüssig!
Barwert des Renten-kapitals nach Bezügen			8'185	
Endwert des Renten-kapitals nach Bezügen	8'185	0.855	**9'575**	

	Cashflow	Faktor	Endwert	
Endwert der nachschüssigen Bezügen	-500	3.630	-2'123	$A_{nach} \bullet RBF_{nach} \bullet (1+i)^n$
Endwert des Rentenkapitals	10'000	1.170	11'699	Faktor = (1+i)^4
			9'575	

Nachweis Endwert der nachschüssigen Bezüge	Cashflow	Zins
0		-
1	500	562
2	500	541
3	500	520
4	500	500
		2'123

3.6. Lösungen Aufgaben Kombinatorik und Wahrscheinlichkeitsrechnung

Lösung Aufgabe 116: Permutation mit Wiederholung

Permutation mit Wiederholung:

$$\text{Anzahl Möglichkeiten der Anordnung der Kugeln} = \frac{9!}{3! \bullet 2! \bullet 4!} = 1260$$

Lösung Aufgabe 117: Variation ohne Wiederholung

$$\text{Anzahl mögliche Reihenfolgen für die ersten drei Plätze} = \frac{15!}{(15-3)!} = 2730$$

15 Möglichkeiten für Platz 1, 14 Möglichkeiten für Platz 2, 13 Möglichkeiten für Platz 3, also 13 * 14* 15 = 2730 Möglichkeiten.

Lösung Aufgabe 118: Kombination ohne Wiederholung

Student löst drei Fragen aus den ersten fünf:

$$\text{Anzahl Möglichkeiten} = \frac{5!}{3! \bullet (5-3)!} \bullet \frac{7!}{5! \bullet (7-5)!} = 210$$

Student löst vier Fragen aus den ersten fünf:

$$\text{Anzahl Möglichkeiten} = \frac{5!}{4! \bullet (5-4)!} \bullet \frac{7!}{4! \bullet (7-4)!} = 175$$

Student löst fünf Fragen aus den ersten fünf:

$$\text{Anzahl Möglichkeiten} = \frac{5!}{5! \bullet (5-5)!} \bullet \frac{7!}{3! \bullet (7-3)!} = 35$$

Insgesamt 210 + 175 + 35 = 420 Möglichkeiten

Lösung Aufgabe 119: Schokoladentafeln

a) Variation ohne Wiederholung, da die Reihenfolge der Auswahl zu berücksichtigen ist. Es ist ein unterschiedlicher Zustand, ob bspw. Lara eine Tafel Milchschokolade und Max eine Tafel weisse Schokolade hat oder ob Lara eine Tafel weisse Schokolade und Max die Tafel Milchschokolade hat.

$$\text{Anzahl Möglichkeiten der Auswahl} = \frac{3!}{(3-2)!} = 6$$

b) Wird die Reihenfolge der Auswahl nicht berücksichtigt, d.h. es ist nur die Kombination der ausgewählten Schokoladentafeln relevant, ergibt sich eine Kombination ohne Wiederholung:

$$\text{Anzahl Möglichkeiten der Auswahl} = \frac{3!}{2! \bullet (3-2)!} = 3$$

Lösung Aufgabe 120: Würfel

Kombination mit Wiederholung:

$$\text{Anzahl Möglichkeiten der Endstellungen der Würfel} = \frac{(6+3-1)!}{3! \bullet (6-1)!} = 56$$

Lösung Aufgabe 121: Praktikumsplätze

a) Kombination ohne Wiederholung:

$$\text{Anzahl Möglichkeiten die Plätze zu besetzen} = \frac{12!}{5! \bullet (12-5)!} = 792$$

b) Kombination ohne Wiederholung aber mit nur 11 Plätzen für 4 Studierende:

$$\text{Anzahl Möglichkeiten die Plätze zu besetzen} = \frac{11!}{4! \bullet (11-4)!} = 330$$

c) Kombination ohne Wiederholung aber mit nur 10 Plätzen für 3 Studierende:

$$\text{Anzahl Möglichkeiten die Plätze zu besetzen} = \frac{10!}{3! \bullet (10-3)!} = 120$$

d) Ohne Feste Zuteilung bekommt jeder Studierende bei 5/12 aller Kombinationen einen Platz zugeteilt, bei der festen Zuteilung eines Platzes bekommt jeder Studierende bei 4/11 aller Kombinationen einen Platz zugeteilt und bei der festen Zuteilung von zwei Plätzen bekommt jeder Studierende bei 3/10 aller Kombinationen einen Platz zugeteilt. Daraus ergeben sich folgende Wahrscheinlichkeiten:

alle Plätze sind für 12 Studierende verfügbar: $\frac{792 \bullet \frac{5}{12}}{792} = 0.417$

Die Wahrscheinlichkeit für jeden Studierenden, einen Platz zugeteilt zu erhalten beträgt 41.7% (fünf Zwölftel).

nur 4 Plätze sind für 11 Studierende verfügbar: $\frac{330 \bullet \frac{4}{11}}{330} = 0.364$

Die Wahrscheinlichkeit für jeden Studierenden, dem im Voraus kein Platz fest zugeteilt wurde, einen Platz zugeteilt zu erhalten beträgt 36.4% (vier Elftel).

nur 3 Plätze sind für 10 Studierende verfügbar: $\frac{120 \bullet \frac{3}{10}}{120} = 0.300$

Die Wahrscheinlichkeit für jeden Studierenden, dem im Voraus kein Platz fest zugeteilt wurde, einen Platz zugeteilt zu erhalten beträgt 30.0% (drei Zehntel).

Lösung Aufgabe 122: Büchergestell

Permutation ohne Wiederholungen:

4! = 24

Lösung Aufgabe 123: Vier-Buchstaben-Wort

Permutation ohne Wiederholungen:

4 Möglichkeiten für den 1. Stein, 3 Möglichkeiten für den 2. Stein, 2 Möglichkeiten für den 3. Stein, 1 Möglichkeit für den 4. Stein, also 4 * 1 * 2 * 3 = 4! = 24 Möglichkeiten.

Lösung Aufgabe 124: Pferderennen

Variation ohne Wiederholungen:

$$\text{Anzahl mögliche Reihenfolgen für die ersten drei Plätze} = \frac{15!}{(15-3)!} = 2730$$

15 Möglichkeiten für Platz 1, 14 Möglichkeiten für Platz 2, 13 Möglichkeiten für Platz 3, also 13 * 14* 15 = 2730 Möglichkeiten.

Lösung Aufgabe 125: Spielsteine

Permutation mit Wiederholungen:

$$\text{Anzahl mögliche Reihenfolgen} = \frac{(4+3+5)!}{4! \bullet 3! \bullet 5!} = 27720$$

Lösung Aufgabe 126: Optische Rufanlage

Kombination ohne Wiederholung:

$$\text{Anzahl Anzeigemöglichkeiten mit einer Farbe} = \frac{5!}{1! \bullet (5-1)!} = 5$$

$$\text{Anzahl Anzeigemöglichkeiten mit zwei Farben} = \frac{5!}{2! \bullet (5-2)!} = 10$$

$$\text{Anzahl Anzeigemöglichkeiten mit drei Farben} = \frac{5!}{3! \bullet (5-3)!} = 10$$

Insgesamt 5 + 10 + 10 = 25 Möglichkeiten (= Anschlüsse)

Lösung Aufgabe 127: Viele Wege zum Ziel

a) 4 * 6 = 24

b) 6 * 4 * 4 * 6 = 576

c) 6 * 4 * 3 * 5 = 360

Lösung Aufgabe 128: Zahlen und Ziffern

a) $\text{Anzahl mögliche Zahlen} = \frac{6!}{(6-3)!} = 120$

b) An der ersten Stelle muss entweder eine 2 oder eine 3 stehen, also sind für die zweite und dritte Stelle jeweils nur noch fünf bzw. vier andere Zahlen zur Verfügung.

$$\text{Anzahl mögliche Zahlen, wenn 2 an erster Stelle steht} = \frac{5!}{(5-2)!} = 20$$

$$\text{Anzahl mögliche Zahlen, wenn 3 an erster Stelle steht} = \frac{5!}{(5-2)!} = 20$$

Deshalb sind insgesamt 40 Zahlen möglich, welche kleiner als 400 sind.

c) An der letzten Stelle muss entweder eine 2 oder eine 6 stehen, also stehen für die erste und zweite Stelle nur noch fünf bzw. vier andere Zahlen zur Verfügung.

$$\text{Anzahl mögliche Zahlen, wenn 2 an letzter Stelle steht} = \frac{5!}{(5-2)!} = 20$$

$$\text{Anzahl mögliche Zahlen, wenn 6 an letzter Stelle steht} = \frac{5!}{(5-2)!} = 20$$

Deshalb sind insgesamt 40 gerade Zahlen möglich.

d) Wenn an erster Stelle eine 2 steht, muss an letzter Stelle eine 6 stehen und für die mittlere Stelle stehen noch vier Möglichkeiten offen. 4

Wenn an der ersten Stelle eine 3 steht muss an letzter Stelle eine 2 oder eine 6 stehen, steht an letzter Stelle eine 2, sind 4 Möglichkeiten offen, 4

steht an letzter Stelle eine 6, sind ebenfalls 4 Möglichkeiten offen. 4

ergibt insgesamt 12 Möglichkeiten.

Lösung Aufgabe 129: Euro Millions

Ziehungsmöglichkeiten bei Euro Millions:

$$\text{Anzahl Möglichkeiten} = \frac{50!}{5! \bullet (50-5)!} \bullet \frac{9!}{2! \bullet (9-2)!} = 76'275'360$$

Chance eines Haupttreffers = 1/76275360 = 0.000013 Promille

Lösung Aufgabe 130: Dreiachser

a) Permutation ohne Wiederholung mit 10 Pneus (2 Pneus Vorderachse plus je 4 Pneus für die beiden Hinterachsen). 10! = 3'628'800 Möglichkeiten

b) Zwei Permutationen ohne Wiederholungen, einerseits mit den sechs Aussenrädern, andererseits mit den vier Innenrädern. 6! * 4! = 17'280 Möglichkeiten

c) Permutation mit Wiederholung, wobei vier Mal zwei gleiche Elemente vorkommen (Wiederholungen)

$$\frac{10!}{2! \bullet 2! \bullet 2! \bullet 2!} = 226'800 \text{ Möglichkeiten}$$

Lösung Aufgabe 131: Prüfungsaufgaben

Kombination ohne Wiederholung

Student löst drei Fragen aus den ersten fünf:

$$\text{Anzahl Möglichkeiten} = \frac{5!}{3! \bullet (5-3)!} \bullet \frac{7!}{5! \bullet (7-5)!} = 210$$

Student löst vier Fragen aus den ersten fünf:

$$\text{Anzahl Möglichkeiten} = \frac{5!}{4! \bullet (5-4)!} \bullet \frac{7!}{4! \bullet (7-4)!} = 175$$

Student löst fünf Fragen aus den ersten fünf:

$$\text{Anzahl Möglichkeiten} = \frac{5!}{5! \bullet (5-5)!} \bullet \frac{7!}{3! \bullet (7-3)!} = 35$$

Insgesamt 210 + 175 + 35 = 420 Möglichkeiten

Lösung Aufgabe 132: Zahlenlotto

Anzahl Variationen, 5 richtige zu tippen:

(6 aus 45) / (5 aus 6) / (1 aus 39) = $\frac{45!}{6!\bullet(45-6)!} / \frac{6!}{5!\bullet(6-5)!} / \frac{39!}{1!\bullet(39-1)!} = 34'808$

Die Chance, die CHF 18'600.- mit einem "5er" zu gewinnen beträgt:

$\frac{1}{34'808} = 0.0029\%$

Anzahl Variationen, 4 richtige zu tippen:

(6 aus 45) / (4 aus 6) / (2 aus 39) = $\frac{45!}{6!\bullet(45-6)!} / \frac{6!}{4!\bullet(6-4)!} / \frac{39!}{2!\bullet(39-2)!} = 733$

(statistisch müsste bei jedem 733sten Tipp ein "4er" erzielt werden)

Um die den Gewinn von CHF 18'600.- mit "4ern" zu kumulieren werden
18'600 / 50 = 372
Treffer benötigt. Die Chance, die CHF 18'600.- mit 372 "4ern" zu gewinnen beträgt:

$\frac{1}{372 \bullet 733} = 0.00037\%$

Anzahl Variationen, 3 richtige zu tippen:

(6 aus 45) / (3 aus 6) / (3 aus 39) = $\frac{45!}{6!\bullet(45-6)!} / \frac{6!}{3!\bullet(6-3)!} / \frac{39!}{3!\bullet(39-3)!} = 45$

(statistisch müsste bei jedem 45sten Tipp ein "4er" erzielt werden)

Um die den Gewinn von CHF 18'600.- mit "3ern" zu kumulieren werden
18'600 / 6 = 3'100
Treffer benötigt. Die Chance, die CHF 18'600.- mit 3'100 "3ern" zu gewinnen beträgt:

$\frac{1}{3100 \bullet 45} = 0.00072\%$

Somit war am 25. März 2006 der Gewinn mit 5 richtigen Zahlen gegenüber der Gewinnchance mit "3ern" und "4ern" über 40 mal höher, dies weil am 25. März 2006 ein sehr hoher Betrag im Jackpot lag und kein Sechser erzielt wurde.

Lösung Aufgabe 133: Hauptbahnhof

seine Chancen sind 5/67=7.5%

Lösung Aufgabe 134: Dezimieren

Bei 267 Gefangenen werden 26 erschossen, woraus folgende Überlebenschance ermittelt werden kann: $1 - \frac{26}{267} = 90.3\%$

Lösung Aufgabe 135: Kreise und Sehnen

Vom ersten Punkt aus gehen sieben Sehnen ab, vom zweiten noch sechs (eigentlich auch 7, aber eine geht zu Punkt 1). Also gibt es 7+6+5+4+3+2+1 = 28 Sehnen.

$$\frac{n \bullet (n-1)}{2} = \frac{8 \bullet (8-1)}{2} = 28$$

Lösung Aufgabe 136: Hörsaal

Permutation mit Wiederholung: 21! / 6! = 70'959'641'905'152'000 Möglichkeiten

Lösung Aufgabe 137: Stichprobe

Kombination ohne Wiederholung von 1 Geräte (4 - 3 Geräte) aus 9 Geräten (12 - 3 Geräte):

$$\frac{n!}{m! \bullet (n - m)!} \frac{9!}{1! \bullet (9 - 1)!} = 9$$

Lösung Aufgabe 138: Spanisch-Brötli-Bahn

In Zürich HB gibt es 9 verschiedene Fahrkarten zu kaufen, in Zürich Hardbrücke noch 8 verschiedene Fahrkarten, in Zürich-Altstetten noch 7 usw.

$$\frac{n \bullet (n-1)}{2} = \frac{10 \bullet (10-1)}{2} = 45$$

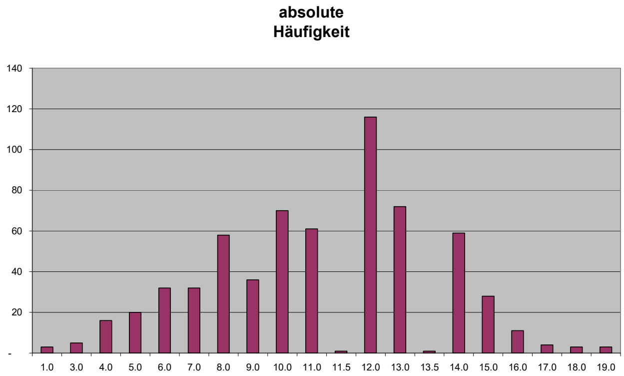
1. Lösungen zur Statistik

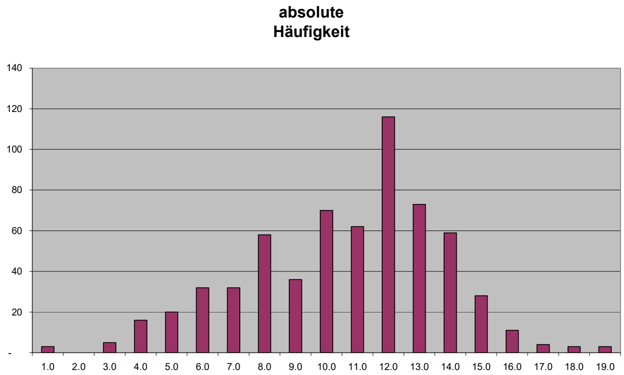
Lösung Aufgabe 139: Ewige Liebe

Aufgabe a)

20 Ausprägungen, in diesem Beispiel die Alterskategorien

Aufgabe b)





Aufgabe c)

jünger als 7 Jahre: 76 Befragte

älter als 13 Jahre: 109 Befragte

Aufgabe d)

Alter in Jahren	absolute Häufigkeit	%
1.0	3	0%
3.0	5	1%
4.0	16	4%
5.0	20	7%
6.0	32	12%
7.0	32	17%
8.0	58	26%
9.0	36	32%
10.0	70	43%
11.0	61	53%
11.5	1	53%
12.0	**116**	**71%**

Keine Aussage möglich

Aufgabe e)

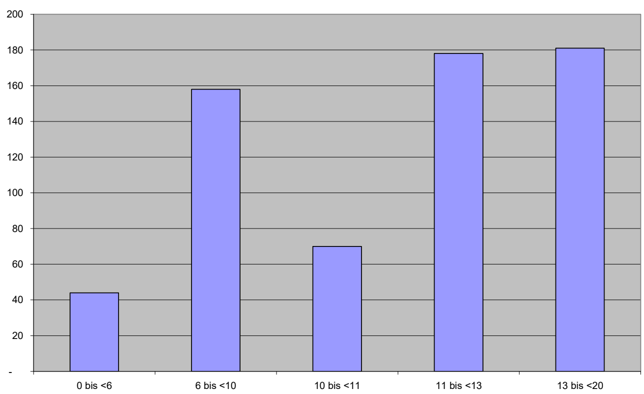
Angenommen, die in der Ausgangslage aufgeführte Tabelle sei eine bereinigte Darstellung der Umfrage, in dem Sinn, dass ursprünglich 648 Jugendliche im Alter zwischen 12 und 19 Jahren befragt worden waren, von denen aber 17 die Antwort "Ich war bis jetzt noch nie verliebt" gegeben haben. Wie ändern sich Ihre Ergebnisse zu den obigen Aufgaben a bis d, wenn sie diese 17 Personen in die Auswertung mit einbeziehen?

Teilaufgaben a bis c keine Änderung

Teilaufgabe d

Alter in Jahren	absolute Häufigkeit	%
1.0	3	0%
3.0	5	1%
4.0	16	4%
5.0	20	7%
6.0	32	12%
7.0	32	17%
8.0	58	26%
9.0	36	31%
10.0	70	42%
11.0	61	51%
11.5	1	52%
12.0	**116**	**69%**
13.0	72	81%
13.5	1	81%
14.0	59	90%
15.0	28	94%
16.0	11	96%
17.0	4	96%
18.0	3	97%
19.0	3	97%
nie	17	100%
20	**648**	100%

Aufgabe f)



Aufgabe g)

Bestimmen Sie zu den vorstehenden Daten Median, arithmetisches Mittel und Modus, jeweils sowohl für die Rohdaten (Ausgangslage) als auch für die wie in Aufgabe f klassierten Daten.

Lösung Aufgabe 140: Informatik Höhere Fachschule

Jahr	Bestand	Zunahme in %
2002	100	
2003	121	21%
2004	152	26%
2005	**166**	9%
2006	129	**-22%**
2006	101	**-22%**

Lösung Aufgabe 141: Schützenverein

a) Ermitteln Sie für beide Vereine folgende statistischen Werte (Ausweis auf 2 Nachkommastellen genau):

	Verein A	Verein B
arithmetisches Mittel	**2.89**	**2.89**
Modus	**3**	**1 und/oder 5**
Median	**3**	**2**

b) Bei welcher Vereinsmannschaft hätten Sie als 10. Schütze die grösseren Chancen zur besseren Hälfte der Schützen zu gehören?

Begründen Sie Ihre Antwort in Stichworten

Verein: **B**

Begründung: **da Median tiefer als das arithmetische Mittel ist**

Lösung Aufgabe 142: Mathematikkurs

a) Ermitteln Sie für beide Kursgruppen folgende statistischen Werte (Ausweis auf 2 Nachkommastellen genau):

	Gauss	Euler
geometrisches Mittel	3.727	3.395
Modus	4.0	5.5
Median	4	5

b) Bei welcher Kursgruppe hätten Sie die grösseren Chancen zur besseren Hälfte der Schüler zu gehören und damit eine Auszeichnung zu erhalten?

Begründen Sie Ihre Antwort in Stichworten

Gruppe:	**Gruppe Gauss**
Begründung:	**Median liegt tiefer als bei Gruppe Euler**

Lösung Aufgabe 143: Würfelwette

a) Ermitteln Sie für beide Ritter folgende statistischen Werte ihrer Würfe (Ausweis auf 2 Nachkommastellen genau):

	Ritter von Falkenburg	Ritter von Rebenberg
geometrisches Mittel	2.86	2.59
Modus	3	4
Median	3	4

b) Welchen Würfel wählt Löwenherz aus, um seine Gewinnchancen zu maximieren, denjenigen aus Messing oder denjenigen aus Zinn? Begründen Sie Ihre Antwort in Stichworten

Gewählter Würfel:	**Würfel aus Zinn**
Begründung:	**Der Median liegt höher, als sind die Chancen eine Zahl von 4 Augen und mehr zu würfeln höher.**

Lösung Aufgabe 144: Fallstudie Fertigungsprozess

Die Lösung ist in der Diskussion zu entwickeln.

Lösung Aufgabe 145: Fallstudie Kundenstruktur

Die Lösung ist in der Diskussion zu entwickeln.

2. Lösungen zu den Aufgaben zur Aussagenlogik

2.1. Einführungsaufgaben

Lösung Aufgabe 146: Die "und"-Verknüpfung

a) A: Paul hat eine 5 in Mathematik
B: Paula hat eine 5 in Mathematik
Paul und Paula haben eine 5 in Mathematik: $A \cap B$ = Wahr

b) A: Studierenden mit einer 2 in der Mathematikprüfung
B: Studierenden mit einer 3 in der Mathematikprüfung
Im Schulzimmer bleiben Studierende: $A \cap B$ = Falsch
korrekt werde "entweder oder" = XOR:
$(A \cup B) \cap \neg(A \cup B)$

c) A: Johanna trifft Karla
B: Karla trifft Johanna
Johanna und Karla treffen sich wenn: $A \cap B$ = Wahr

d) A: 5 ist eine Primzahl
B: 7 ist eine Primzahl
Primzahlen sind: $A \cap B$ = Wahr

e) A: er geht auf der rechten Seite der Strasse
B: er geht auf der linken Seite der Strasse
$A \cap B$ = Falsch

f) A: Studierende, die den Klassenkassenbeitrag bezahlt haben
B: Studierende, die ihr Impfbuch abgegeben haben
Im Klassenzimmer bleiben noch: $\neg A \cap \neg B$ = Wahr

Lösung Aufgabe 147: Die "oder"-Verknüpfung

a) A: Ich esse gerne Käse
B: Ich esse gerne Marmelade
Zum Frühstück esse ich gerne: $A \cup B$ = Wahr

b) A: Heute Abend gehe ich ins Kino
B: Heute Abend bleibe ich zu Hause
$A \cup B$ = Falsch

c) A: Du gibst mir jetzt mein Geld wieder
B: Ich gehe zu Deinem Vater
$A \cup B$ = Falsch

d) A: Sie studiert Physik
B: Sie studiert Mathematik
$A \cup B$ = Falsch

e) A: Zahl ist zwischen 1 und 100
B: Zahl ist durch 3 teilbar
C: Zahl ist durch 5 teilbar $\qquad$ $A \cap (B \cup C)$ = Wahr

Lösung Aufgabe 148: Die "nicht"-Verknüpfung

a) A: Er hat eine 1 geschrieben
¬A = Wahr

b) A: katholische Schüler müssen Morgen zur Schule
¬A = Wahr

c) A: Er sagt die Wahrheit
¬A = Falsch

d) A: 21 ist durch 3 und 4 teilbar
¬A = Wahr

2.2. Wahrheitstabellen

Lösung Aufgabe 149: Wahrheitswerte von Aussagen

¬A ∩ B

A	B	¬	A	∩	B
w	w	~~f~~	w	f	w
w	f	~~f~~	w	f	f
f	w	~~w~~	f	w	w
f	f	~~w~~	f	f	f

Fragestellung: Wann esse ich Brot?
Aussage A: Ich bin satt.
Aussage B: Ich habe ein Brot.

Lösung Aufgabe 150: Wahrheitstabelle

B ∪ A ∩ ¬C

A	B	C	B	∪	A	∩	¬	C
w	w	w	w	w	~~w~~	f	~~f~~	~~w~~
w	w	f	w	w	~~w~~	w	~~w~~	~~f~~
w	f	w	f	f	~~w~~	f	~~f~~	~~w~~
w	f	f	f	w	~~w~~	w	~~w~~	~~f~~
f	w	w	w	w	~~f~~	f	~~f~~	~~w~~
f	w	f	w	w	~~f~~	f	~~w~~	~~f~~
f	f	w	f	f	~~f~~	f	~~f~~	~~w~~
f	f	f	f	f	~~f~~	f	~~w~~	~~f~~

Fragestellung: Wann habe ich Lust auf Schokolade?
Aussage A: Ich habe Appetit.
Aussage B: Ich habe eine Schokolade.
Aussage C: Mir ist es schlecht.

Lösung Aufgabe 151: Wahrheitstabelle

(¬A ∪ B) ∩ B ∩ ¬C

A	B	C	(¬	A	∪	B)	∩	B	∩	¬	C
w	w	w	~~f~~	~~w~~	~~w~~	~~w~~	~~w~~	~~w~~	f	~~f~~	~~w~~
w	w	f	~~f~~	~~w~~	~~w~~	~~w~~	~~w~~	~~w~~	w	~~w~~	~~f~~
w	f	w	~~f~~	~~w~~	~~F~~	~~f~~	~~f~~	~~f~~	f	~~f~~	~~w~~
w	f	f	~~f~~	~~w~~	~~F~~	~~f~~	~~f~~	~~f~~	f	~~w~~	~~f~~
f	w	w	~~w~~	~~f~~	~~w~~	~~w~~	~~w~~	~~w~~	f	~~f~~	~~w~~
f	w	f	~~w~~	~~f~~	~~w~~	~~w~~	~~w~~	~~w~~	w	~~w~~	~~f~~
f	f	w	~~w~~	~~f~~	~~w~~	~~f~~	~~f~~	~~f~~	f	~~f~~	~~w~~
f	f	f	~~w~~	~~f~~	~~w~~	~~f~~	~~f~~	~~f~~	f	~~w~~	~~f~~

Lösung Aufgabe 152: Lagerverwaltung

Aussage A: Der Minimalbestand ist unterschritten.

Aussage B: Eine Bestellung ist pendent.

Aussage: **Bestellung wird ausgelöst** wenn **Minimalbestand unterschritten** und nicht **Bestellung pendent** ist.

A	B	A	∩	¬	B
w	w	**w**	**f**	**f**	**w**
w	f	**w**	**w**	**w**	**f**
f	w	**f**	**f**	**f**	**w**
f	f	**f**	**f**	**w**	**f**

Lösung Aufgabe 153: Tagessicherung

Aussage A: Sicherung durchgeführt

Aussage B: Daten geändert

Aussage C: Ausreichend Speicherplatz.

A	B	C	¬	A	∩	B	∩	C				
w	w	w	~~f~~	~~w~~	~~f~~	~~w~~	f	~~w~~				
w	w	f	~~f~~	~~w~~	~~f~~	~~w~~	f	~~f~~				
w	f	w	~~f~~	~~w~~	~~f~~	~~f~~	f	~~w~~				
w	f	f	~~f~~	~~w~~	~~f~~	~~f~~	f	~~f~~				
f	w	w	~~w~~	~~f~~	~~w~~	~~w~~	w	~~w~~				
f	w	f	~~w~~	~~f~~	~~w~~	~~w~~	f	~~f~~				
f	f	w	~~w~~	~~f~~	~~f~~	~~f~~	f	~~w~~				
f	f	f	~~w~~	~~f~~	~~f~~	~~f~~	f	~~f~~				

Lösung Aufgabe 154: Zugriffsprüfung

Aussage A: Programm wird durch andere Anwender benutzt

Aussage B: ein anderer Benutzer hat Schreibberechtigung

Aussage C: Lizenz ist verfügbar.

Aussage D: Ausreichend Platz im Arbeitsspeicher

A	B	C	D	(¬	A	∪	B)	∩	C	∩	D	
w	w	w	w	~~f~~	~~w~~	~~w~~	~~w~~	~~w~~	~~w~~	**w**	~~w~~	
w	w	w	f	~~f~~	~~w~~	~~w~~	~~w~~	~~w~~	~~w~~	**f**	~~f~~	
w	w	f	w	~~f~~	~~w~~	~~w~~	~~w~~	~~f~~	~~f~~	**f**	~~w~~	
w	w	f	f	~~f~~	~~w~~	~~w~~	~~w~~	~~f~~	~~f~~	**f**	~~f~~	
w	f	w	w	~~f~~	~~w~~	~~f~~	~~f~~	~~f~~	~~w~~	**f**	~~w~~	
w	f	w	f	~~f~~	~~w~~	~~f~~	~~f~~	~~f~~	~~w~~	**f**	~~f~~	
w	f	f	w	~~f~~	~~w~~	~~f~~	~~f~~	~~f~~	~~f~~	**f**	~~w~~	
w	f	f	f	~~f~~	~~w~~	~~f~~	~~f~~	~~f~~	~~f~~	**f**	~~f~~	
f	w	w	w	~~w~~	~~f~~	~~w~~	~~w~~	~~w~~	~~w~~	**w**	~~w~~	
f	w	w	f	~~w~~	~~f~~	~~w~~	~~w~~	~~w~~	~~w~~	**f**	~~f~~	
f	w	f	w	~~w~~	~~f~~	~~w~~	~~w~~	~~f~~	~~f~~	**f**	~~w~~	
f	w	f	f	~~w~~	~~f~~	~~w~~	~~w~~	~~f~~	~~f~~	**f**	~~f~~	
f	f	w	w	~~w~~	~~f~~	~~w~~	~~f~~	~~w~~	~~w~~	**w**	~~w~~	
f	f	w	f	~~w~~	~~f~~	~~w~~	~~f~~	~~w~~	~~w~~	**f**	~~f~~	
f	f	f	w	~~w~~	~~f~~	~~w~~	~~f~~	~~f~~	~~f~~	**f**	~~w~~	
f	f	f	f	~~w~~	~~f~~	~~w~~	~~f~~	~~f~~	~~f~~	**f**	~~f~~	

Lösung Aufgabe 155: Wahrheitstabelle Fluglageüberwachungssystem

Aussage A: Die Fluggeschwindigkeit ist kleiner 300.

Aussage B: Der Triebwerkschub ist unter 50%.

Aussage C: Die Landeklappen sind ausgefahren.

Aussage D: Die Sinkgeschwindigkeit liegt unter 20.

A	B	C	D	A	∩	((B	∩	¬	C	∩	D)	∪	(¬	B	∩	C	∩	¬	D))
W	W	W	W	~~W~~	F	~~W~~	~~F~~	~~F~~	~~W~~	~~F~~	~~W~~	~~F~~	~~F~~	~~W~~	~~F~~	~~W~~	~~F~~	~~F~~	~~W~~
W	W	W	F	~~W~~	F	~~W~~	~~F~~	~~F~~	~~W~~	~~F~~	~~F~~	~~F~~	~~F~~	~~W~~	~~F~~	~~W~~	~~F~~	~~W~~	~~F~~
W	W	F	W	~~W~~	W	~~W~~	~~W~~	~~W~~	~~F~~	~~W~~	~~W~~	~~W~~	~~F~~	~~W~~	~~F~~	~~F~~	~~F~~	~~F~~	~~W~~
W	W	F	F	~~W~~	F	~~W~~	~~W~~	~~W~~	~~F~~	~~F~~	~~F~~	~~F~~	~~F~~	~~W~~	~~F~~	~~F~~	~~F~~	~~W~~	~~F~~
W	F	W	W	~~W~~	F	~~F~~	~~F~~	~~F~~	~~W~~	~~F~~	~~W~~	~~F~~	~~W~~	~~F~~	~~W~~	~~W~~	~~F~~	~~F~~	~~W~~
W	F	W	F	~~W~~	W	~~F~~	~~F~~	~~F~~	~~W~~	~~F~~	~~F~~	~~W~~	~~W~~	~~F~~	~~W~~	~~W~~	~~W~~	~~W~~	~~F~~
W	F	F	W	~~W~~	F	~~F~~	~~F~~	~~W~~	~~F~~	~~F~~	~~W~~	~~F~~	~~W~~	~~F~~	~~F~~	~~F~~	~~F~~	~~F~~	~~W~~
W	F	F	F	~~W~~	F	~~F~~	~~F~~	~~W~~	~~F~~	~~F~~	~~F~~	~~F~~	~~W~~	~~F~~	~~F~~	~~F~~	~~F~~	~~W~~	~~F~~
F	W	W	W	~~F~~	F	~~W~~	~~F~~	~~F~~	~~W~~	~~F~~	~~W~~	~~F~~	~~F~~	~~W~~	~~F~~	~~W~~	~~F~~	~~F~~	~~W~~
F	W	W	F	~~F~~	F	~~W~~	~~F~~	~~F~~	~~W~~	~~F~~	~~F~~	~~F~~	~~F~~	~~W~~	~~F~~	~~W~~	~~F~~	~~W~~	~~F~~
F	W	F	W	~~F~~	F	~~W~~	~~W~~	~~W~~	~~F~~	~~W~~	~~W~~	~~W~~	~~F~~	~~W~~	~~F~~	~~F~~	~~F~~	~~F~~	~~W~~
F	W	F	F	~~F~~	F	~~W~~	~~W~~	~~W~~	~~F~~	~~F~~	~~F~~	~~F~~	~~F~~	~~W~~	~~F~~	~~F~~	~~F~~	~~W~~	~~F~~
F	F	W	W	~~F~~	F	~~F~~	~~F~~	~~F~~	~~W~~	~~F~~	~~W~~	~~F~~	~~W~~	~~F~~	~~W~~	~~W~~	~~F~~	~~F~~	~~W~~
F	F	W	F	~~F~~	F	~~F~~	~~F~~	~~F~~	~~W~~	~~F~~	~~F~~	~~W~~	~~W~~	~~F~~	~~W~~	~~W~~	~~W~~	~~W~~	~~F~~
F	F	F	W	~~F~~	F	~~F~~	~~F~~	~~W~~	~~F~~	~~F~~	~~W~~	~~F~~	~~W~~	~~F~~	~~F~~	~~F~~	~~F~~	~~F~~	~~W~~
F	F	F	F	~~F~~	F	~~F~~	~~F~~	~~W~~	~~F~~	~~F~~	~~F~~	~~F~~	~~W~~	~~F~~	~~F~~	~~F~~	~~F~~	~~W~~	~~F~~

Lösung Aufgabe 156: Druckmanager

Erstellen Sie anhand folgender Problemstellung eine Wahrheitstabelle:

Der Druckmanager sendet ein zu druckendes Dokument zum Drucker, wenn dieser betriebsbereit und frei ist und sich kein anderes Dokument in der Druckerwarteschlange befindet oder das Dokument in der Druckerwarteschlange hat eine tiefere Druckpriorität.

Aussage A: Drucker ist betriebsbereit und frei.

Aussage B: Ein anderes Dokument befindet sich in der Druckerwarteschlange.

Aussage C: Das Dokument in der Druckerwarteschlange hat eine tiefere Druckpriorität.

A	B	C	A	∩	¬	B	∪	A	∩	B	∩	C
w	w	w	~~w~~	~~f~~	~~f~~	~~w~~	**w**	~~w~~	~~w~~	~~w~~	~~w~~	~~w~~
w	w	f	~~w~~	~~f~~	~~f~~	~~w~~	**f**	~~w~~	~~w~~	~~w~~	~~f~~	~~f~~
w	f	w	~~w~~	~~w~~	~~w~~	~~f~~	**w**	~~w~~	~~f~~	~~f~~	~~f~~	~~w~~
w	f	f	~~w~~	~~w~~	~~w~~	~~f~~	**w**	~~w~~	~~f~~	~~f~~	~~f~~	~~f~~
f	w	w	~~f~~	~~f~~	~~f~~	~~w~~	**f**	~~f~~	~~f~~	~~w~~	~~f~~	~~w~~
f	w	f	~~f~~	~~f~~	~~f~~	~~w~~	**f**	~~f~~	~~f~~	~~w~~	~~f~~	~~f~~
f	f	w	~~f~~	~~f~~	~~w~~	~~f~~	**f**	~~f~~	~~f~~	~~f~~	~~f~~	~~w~~
f	f	f	~~f~~	~~f~~	~~w~~	~~f~~	**f**	~~f~~	~~f~~	~~f~~	~~f~~	~~f~~

Lösung Aufgabe 157: Promotionsordnung

Vorschlag für Aussagen:

Aussage A: Durchschnitt Diplomprüfungsnoten mindestens 4.0

Aussage B: mindestens eine Diplomprüfungsnoten tiefer als 2.5

Aussage C: höchstens drei Diplomprüfungsnoten unter 4.0

Aussage D: eine Diplomprüfungsnote unter 3.5

Aussage E: höchstens eine Diplomprüfungsnoten zwischen 3.5 und unter 4.0

A	B	C	D	E	A	∩	¬	B	∩	(C	∪	D	∩	E)		
W	W	W	W	W	~~W~~	~~F~~	~~F~~	~~W~~	F	~~W~~	~~W~~	~~W~~	~~W~~	~~W~~		
W	W	W	W	F	~~W~~	~~F~~	~~F~~	~~W~~	F	~~W~~	~~W~~	~~W~~	~~F~~	~~F~~		
W	W	W	F	W	~~W~~	~~F~~	~~F~~	~~W~~	F	~~W~~	~~W~~	~~F~~	~~F~~	~~W~~		
W	W	W	F	F	~~W~~	~~F~~	~~F~~	~~W~~	F	~~W~~	~~W~~	~~F~~	~~F~~	~~F~~		
W	W	F	W	W	~~W~~	~~F~~	~~F~~	~~W~~	F	~~F~~	~~W~~	~~W~~	~~W~~	~~W~~		
W	W	F	W	F	~~W~~	~~F~~	~~F~~	~~W~~	F	~~F~~	~~F~~	~~W~~	~~F~~	~~F~~		
W	W	F	F	W	~~W~~	~~F~~	~~F~~	~~W~~	F	~~F~~	~~F~~	~~F~~	~~F~~	~~W~~		
W	W	F	F	F	~~W~~	~~F~~	~~F~~	~~W~~	F	~~F~~	~~F~~	~~F~~	~~F~~	~~F~~		
W	F	W	W	W	~~W~~	~~W~~	~~W~~	~~F~~	**W**	~~W~~	~~W~~	~~W~~	~~W~~	~~W~~		
W	F	W	W	F	~~W~~	~~W~~	~~W~~	~~F~~	**W**	~~W~~	~~W~~	~~W~~	~~F~~	~~F~~		
W	F	W	F	W	~~W~~	~~W~~	~~W~~	~~F~~	**W**	~~W~~	~~W~~	~~F~~	~~F~~	~~W~~		
W	F	W	F	F	~~W~~	~~W~~	~~W~~	~~F~~	**W**	~~W~~	~~W~~	~~F~~	~~F~~	~~F~~		
W	F	F	W	W	~~W~~	~~W~~	~~W~~	~~F~~	**W**	~~F~~	~~W~~	~~W~~	~~W~~	~~W~~		
W	F	F	W	F	~~W~~	~~W~~	~~W~~	~~F~~	F	~~F~~	~~F~~	~~W~~	~~F~~	~~F~~		
W	F	F	F	W	~~W~~	~~W~~	~~W~~	~~F~~	F	~~F~~	~~F~~	~~F~~	~~F~~	~~W~~		
W	F	F	F	F	~~W~~	~~W~~	~~W~~	~~F~~	F	~~F~~	~~F~~	~~F~~	~~F~~	~~F~~		
F	W	W	W	W	~~F~~	~~F~~	~~F~~	~~W~~	F	~~W~~	~~W~~	~~W~~	~~W~~	~~W~~		
F	W	W	W	F	~~F~~	~~F~~	~~F~~	~~W~~	F	~~W~~	~~W~~	~~W~~	~~F~~	~~F~~		
F	W	W	F	W	~~F~~	~~F~~	~~F~~	~~W~~	F	~~W~~	~~W~~	~~F~~	~~F~~	~~W~~		
F	W	W	F	F	~~F~~	~~F~~	~~F~~	~~W~~	F	~~W~~	~~W~~	~~F~~	~~F~~	~~F~~		
F	W	F	W	W	~~F~~	~~F~~	~~F~~	~~W~~	F	~~F~~	~~W~~	~~W~~	~~W~~	~~W~~		
F	W	F	W	F	~~F~~	~~F~~	~~F~~	~~W~~	F	~~F~~	~~F~~	~~W~~	~~F~~	~~F~~		
F	W	F	F	W	~~F~~	~~F~~	~~F~~	~~W~~	F	~~F~~	~~F~~	~~F~~	~~F~~	~~W~~		
F	W	F	F	F	~~F~~	~~F~~	~~F~~	~~W~~	F	~~F~~	~~F~~	~~F~~	~~F~~	~~F~~		
F	F	W	W	W	~~F~~	~~F~~	~~W~~	~~F~~	F	~~W~~	~~W~~	~~W~~	~~W~~	~~W~~		
F	F	W	W	F	~~F~~	~~F~~	~~W~~	~~F~~	F	~~W~~	~~W~~	~~W~~	~~F~~	~~F~~		
F	F	W	F	W	~~F~~	~~F~~	~~W~~	~~F~~	F	~~W~~	~~W~~	~~F~~	~~F~~	~~W~~		
F	F	W	F	F	~~F~~	~~F~~	~~W~~	~~F~~	F	~~W~~	~~W~~	~~F~~	~~F~~	~~F~~		
F	F	F	W	W	~~F~~	~~F~~	~~W~~	~~F~~	F	~~F~~	~~W~~	~~W~~	~~W~~	~~W~~		
F	F	F	W	F	~~F~~	~~F~~	~~W~~	~~F~~	F	~~F~~	~~F~~	~~W~~	~~F~~	~~F~~		
F	F	F	F	W	~~F~~	~~F~~	~~W~~	~~F~~	F	~~F~~	~~F~~	~~F~~	~~F~~	~~W~~		
F	F	F	F	F	~~F~~	~~F~~	~~W~~	~~F~~	F	~~F~~	~~F~~	~~F~~	~~F~~	~~F~~		

Teil XII Anhang

1. Zusammenstellung der Ableitungsregeln

	Funktion	Ableitung
Ableitung eines Vielfachen	$c \cdot f(x)$	$c \cdot f'(x)$
Ableitung einer Summe	$f(x) + g(x)$	$f'(x) + g'(x)$
Produktregel	$f(x) \cdot g(x)$	$f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
Quotientenregel	$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{f'(x) \bullet g(x) - f(x) \bullet g'(x)}{g(x)^2}$
Kettenregel	$f(g(x))$	$f'(g(x)) \cdot g'(x)$
Potenzfunktionen	x^n	$n \cdot x^{n-1}$
	1	0
	X	1
	X^2	$2x$
	X^3	$3x^2$
	X^4	$4x^3$
	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
	$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{2}{x^3}$
	$\frac{1}{x^3}$	$-\frac{3}{x^4}$
	$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2 \bullet \sqrt{x}} = -\frac{1}{2} \bullet x^{-\frac{1}{2}}$
	$x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$-\frac{1}{2} \bullet x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2 \bullet x \bullet \sqrt{x}}$
	$x^{\frac{3}{2}} = x \bullet \sqrt{x}$	$\frac{3}{2} \bullet x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} \bullet \sqrt{x}$
	$x^{-\frac{3}{2}}$	$-\frac{3}{2} \bullet x^{-\frac{5}{2}}$
	$x^{\frac{5}{2}}$	$\frac{5}{2} \bullet x^{\frac{3}{2}}$
	$x^{-\frac{5}{2}}$	$-\frac{5}{2} \bullet x^{-\frac{7}{2}}$

	Funktion	**Ableitung**
Winkelfunktionen	sin x	cos x
	cos x	-sin x
	tan x	$\frac{1}{\cos^2 \bullet x}$
	cot x	$-\frac{1}{\sin^2 \bullet x}$
Inverse Winkelfunktionen	asin x	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
	acos x	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
	atan x	$\frac{1}{1+x^2}$
	acot x	$-\frac{1}{1+x^2}$
Exponentialfunktionen	e^x	e^x
	e^{kx}	$k\, e^{kx}$
	a^x	ln $a\, a^x$
Logarithmusfunktionen	ln x	$\frac{1}{x}$
	^{a}log x	$\frac{1}{x \ln a}$

2. Verzeichnis der Aufgaben

3. Abzinsungsfaktorentabelle

(Gegenwartswert einer Zahlung von Fr. 1.--, fällig Ende Jahr)

	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%	11%	12%	13%	14%	15%	16%	17%	18%	19%	20%	21%	22%	23%	24%	25%	30%	35%	40%	45%	50%
1	0.990	0.980	0.971	0.962	0.952	0.943	0.935	0.926	0.917	0.909	0.901	0.893	0.885	0.877	0.870	0.862	0.855	0.847	0.840	0.833	0.826	0.820	0.813	0.806	0.800	0.769	0.741	0.714	0.690	0.667
2	0.980	0.961	0.943	0.925	0.907	0.890	0.873	0.857	0.842	0.826	0.812	0.797	0.783	0.769	0.756	0.743	0.731	0.718	0.706	0.694	0.683	0.672	0.661	0.650	0.640	0.592	0.549	0.510	0.476	0.444
3	0.971	0.942	0.915	0.889	0.864	0.840	0.816	0.794	0.772	0.751	0.731	0.712	0.693	0.675	0.658	0.641	0.624	0.609	0.593	0.579	0.564	0.551	0.537	0.524	0.512	0.455	0.406	0.364	0.328	0.296
4	0.961	0.924	0.888	0.855	0.823	0.792	0.763	0.735	0.708	0.683	0.659	0.636	0.613	0.592	0.572	0.552	0.534	0.516	0.499	0.482	0.467	0.451	0.437	0.423	0.410	0.350	0.301	0.260	0.226	0.198
5	0.951	0.906	0.863	0.822	0.784	0.747	0.713	0.681	0.650	0.621	0.593	0.567	0.543	0.519	0.497	0.476	0.456	0.437	0.419	0.402	0.386	0.370	0.355	0.341	0.328	0.269	0.223	0.186	0.156	0.132
6	0.942	0.888	0.837	0.790	0.746	0.705	0.666	0.630	0.596	0.564	0.535	0.507	0.480	0.456	0.432	0.410	0.390	0.370	0.352	0.335	0.319	0.303	0.289	0.275	0.262	0.207	0.165	0.133	0.108	0.088
7	0.933	0.871	0.813	0.760	0.711	0.665	0.623	0.583	0.547	0.513	0.482	0.452	0.425	0.400	0.376	0.354	0.333	0.314	0.296	0.279	0.263	0.249	0.235	0.222	0.210	0.159	0.122	0.095	0.074	0.059
8	0.923	0.853	0.789	0.731	0.677	0.627	0.582	0.540	0.502	0.467	0.434	0.404	0.376	0.351	0.327	0.305	0.285	0.266	0.249	0.233	0.218	0.204	0.191	0.179	0.168	0.123	0.091	0.068	0.051	0.039
9	0.914	0.837	0.766	0.703	0.645	0.592	0.544	0.500	0.460	0.424	0.391	0.361	0.333	0.308	0.284	0.263	0.243	0.225	0.209	0.194	0.180	0.167	0.155	0.144	0.134	0.094	0.067	0.048	0.035	0.026
10	0.905	0.820	0.744	0.676	0.614	0.558	0.508	0.463	0.422	0.386	0.352	0.322	0.295	0.270	0.247	0.227	0.208	0.191	0.176	0.162	0.149	0.137	0.126	0.116	0.107	0.073	0.050	0.035	0.024	0.017
11	0.896	0.804	0.722	0.650	0.585	0.527	0.475	0.429	0.388	0.350	0.317	0.287	0.261	0.237	0.215	0.195	0.178	0.162	0.148	0.135	0.123	0.112	0.103	0.094	0.086	0.056	0.037	0.025	0.017	0.012
12	0.887	0.788	0.701	0.625	0.557	0.497	0.444	0.397	0.356	0.319	0.286	0.257	0.231	0.208	0.187	0.168	0.152	0.137	0.124	0.112	0.102	0.092	0.083	0.076	0.069	0.043	0.027	0.018	0.012	0.008
13	0.879	0.773	0.681	0.601	0.530	0.469	0.415	0.368	0.326	0.290	0.258	0.229	0.204	0.182	0.163	0.145	0.130	0.116	0.104	0.093	0.084	0.075	0.068	0.061	0.055	0.033	0.020	0.013	0.008	0.005
14	0.870	0.758	0.661	0.577	0.505	0.442	0.388	0.340	0.299	0.263	0.232	0.205	0.181	0.160	0.141	0.125	0.111	0.099	0.088	0.078	0.069	0.062	0.055	0.049	0.044	0.025	0.015	0.009	0.006	0.003
15	0.861	0.743	0.642	0.555	0.481	0.417	0.362	0.315	0.275	0.239	0.209	0.183	0.160	0.140	0.123	0.108	0.095	0.084	0.074	0.065	0.057	0.051	0.045	0.040	0.035	0.020	0.011	0.006	0.004	0.002
16	0.853	0.728	0.623	0.534	0.458	0.394	0.339	0.292	0.252	0.218	0.188	0.163	0.141	0.123	0.107	0.093	0.081	0.071	0.062	0.054	0.047	0.042	0.036	0.032	0.028	0.015	0.008	0.005	0.003	0.002
17	0.844	0.714	0.605	0.513	0.436	0.371	0.317	0.270	0.231	0.198	0.170	0.146	0.125	0.108	0.093	0.080	0.069	0.060	0.052	0.045	0.039	0.034	0.030	0.026	0.023	0.012	0.006	0.003	0.002	0.001
18	0.836	0.700	0.587	0.494	0.416	0.350	0.296	0.250	0.212	0.180	0.153	0.130	0.111	0.095	0.081	0.069	0.059	0.051	0.044	0.038	0.032	0.028	0.024	0.021	0.018	0.009	0.005	0.002	0.001	0.001
19	0.828	0.686	0.570	0.475	0.396	0.331	0.277	0.232	0.194	0.164	0.138	0.116	0.098	0.083	0.070	0.060	0.051	0.043	0.037	0.031	0.027	0.023	0.020	0.017	0.014	0.007	0.003	0.002	0.001	0.000
20	0.820	0.673	0.554	0.456	0.377	0.312	0.258	0.215	0.178	0.149	0.124	0.104	0.087	0.073	0.061	0.051	0.043	0.037	0.031	0.026	0.022	0.019	0.016	0.014	0.012	0.005	0.002	0.001	0.001	0.000
21	0.811	0.660	0.538	0.439	0.359	0.294	0.242	0.199	0.164	0.135	0.112	0.093	0.077	0.064	0.053	0.044	0.037	0.031	0.026	0.022	0.018	0.015	0.013	0.011	0.009	0.004	0.002	0.001	0.000	0.000
22	0.803	0.647	0.522	0.422	0.342	0.278	0.226	0.184	0.150	0.123	0.101	0.083	0.068	0.056	0.046	0.038	0.032	0.026	0.022	0.018	0.015	0.013	0.011	0.009	0.007	0.003	0.001	0.001	0.000	0.000
23	0.795	0.634	0.507	0.406	0.326	0.262	0.211	0.170	0.138	0.112	0.091	0.074	0.060	0.049	0.040	0.033	0.027	0.022	0.018	0.015	0.012	0.010	0.009	0.007	0.006	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000
24	0.788	0.622	0.492	0.390	0.310	0.247	0.197	0.158	0.126	0.102	0.082	0.066	0.053	0.043	0.035	0.028	0.023	0.019	0.015	0.013	0.010	0.008	0.007	0.006	0.005	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000
25	0.780	0.610	0.478	0.375	0.295	0.233	0.184	0.146	0.116	0.092	0.074	0.059	0.047	0.038	0.030	0.024	0.020	0.016	0.013	0.010	0.009	0.007	0.006	0.005	0.004	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000
30	0.742	0.552	0.412	0.308	0.231	0.174	0.131	0.099	0.075	0.057	0.044	0.033	0.026	0.020	0.015	0.012	0.009	0.007	0.005	0.004	0.003	0.003	0.002	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
35	0.706	0.500	0.355	0.253	0.181	0.130	0.094	0.068	0.049	0.036	0.026	0.019	0.014	0.010	0.008	0.006	0.004	0.003	0.002	0.002	0.001	0.001	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
40	0.672	0.453	0.307	0.208	0.142	0.097	0.067	0.046	0.032	0.022	0.015	0.011	0.008	0.005	0.004	0.003	0.002	0.001	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
45	0.639	0.410	0.264	0.171	0.111	0.073	0.048	0.031	0.021	0.014	0.009	0.006	0.004	0.003	0.002	0.001	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
50	0.608	0.372	0.228	0.141	0.087	0.054	0.034	0.021	0.013	0.009	0.005	0.003	0.002	0.001	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
60	0.550	0.305	0.170	0.095	0.054	0.030	0.017	0.010	0.006	0.003	0.002	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
70	0.498	0.250	0.126	0.064	0.033	0.017	0.009	0.005	0.002	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
80	0.451	0.205	0.094	0.043	0.020	0.009	0.004	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
90	0.408	0.168	0.070	0.029	0.012	0.005	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
100	0.370	0.138	0.052	0.020	0.008	0.003	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
120	0.303	0.093	0.029	0.009	0.003	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
140	0.248	0.063	0.016	0.004	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
150	0.225	0.051	0.012	0.003	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

4. Rentenbarwertfaktorentabelle

(Gegenwartswert eines Zahlungsstromes von jährlich von Fr. 1.--, fällig jeweils auf Ende Jahr während n Jahren)

	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%	11%	12%	13%	14%	15%	16%	17%	18%	19%	20%	21%	22%	23%	24%	25%	30%	35%	40%	45%	50%
1	0.990	0.980	0.971	0.962	0.952	0.943	0.935	0.926	0.917	0.909	0.901	0.893	0.885	0.877	0.870	0.862	0.855	0.847	0.840	0.833	0.826	0.820	0.813	0.806	0.800	0.769	0.741	0.714	0.690	0.667
2	1.970	1.942	1.913	1.886	1.859	1.833	1.808	1.783	1.759	1.736	1.713	1.690	1.668	1.647	1.626	1.605	1.585	1.566	1.547	1.528	1.509	1.492	1.474	1.457	1.440	1.361	1.289	1.224	1.165	1.111
3	2.941	2.884	2.829	2.775	2.723	2.673	2.624	2.577	2.531	2.487	2.444	2.402	2.361	2.322	2.283	2.246	2.210	2.174	2.140	2.106	2.074	2.042	2.011	1.981	1.952	1.816	1.696	1.589	1.493	1.407
4	3.902	3.808	3.717	3.630	3.546	3.465	3.387	3.312	3.240	3.170	3.102	3.037	2.974	2.914	2.855	2.798	2.743	2.690	2.639	2.589	2.540	2.494	2.448	2.404	2.362	2.166	1.997	1.849	1.720	1.605
5	4.853	4.713	4.580	4.452	4.329	4.212	4.100	3.993	3.890	3.791	3.696	3.605	3.517	3.433	3.352	3.274	3.199	3.127	3.058	2.991	2.926	2.864	2.803	2.745	2.689	2.436	2.220	2.035	1.876	1.737
6	5.795	5.601	5.417	5.242	5.076	4.917	4.767	4.623	4.486	4.355	4.231	4.111	3.998	3.889	3.784	3.685	3.589	3.498	3.410	3.326	3.245	3.167	3.092	3.020	2.951	2.643	2.385	2.168	1.983	1.824
7	6.728	6.472	6.230	6.002	5.786	5.582	5.389	5.206	5.033	4.868	4.712	4.564	4.423	4.288	4.160	4.039	3.922	3.812	3.706	3.605	3.508	3.416	3.327	3.242	3.161	2.802	2.508	2.263	2.057	1.883
8	7.652	7.325	7.020	6.733	6.463	6.210	5.971	5.747	5.535	5.335	5.146	4.968	4.799	4.639	4.487	4.344	4.207	4.078	3.954	3.837	3.726	3.619	3.518	3.421	3.329	2.925	2.598	2.331	2.109	1.922
9	8.566	8.162	7.786	7.435	7.108	6.802	6.515	6.247	5.995	5.759	5.537	5.328	5.132	4.946	4.772	4.607	4.451	4.303	4.163	4.031	3.905	3.786	3.673	3.566	3.463	3.019	2.665	2.379	2.144	1.948
10	9.471	8.983	8.530	8.111	7.722	7.360	7.024	6.710	6.418	6.145	5.889	5.650	5.426	5.216	5.019	4.833	4.659	4.494	4.339	4.192	4.054	3.923	3.799	3.682	3.571	3.092	2.715	2.414	2.168	1.965
11	10.368	9.787	9.253	8.760	8.306	7.887	7.499	7.139	6.805	6.495	6.207	5.938	5.687	5.453	5.234	5.029	4.836	4.656	4.486	4.327	4.177	4.035	3.902	3.776	3.656	3.147	2.752	2.438	2.185	1.977
12	11.255	10.575	9.954	9.385	8.863	8.384	7.943	7.536	7.161	6.814	6.492	6.194	5.918	5.660	5.421	5.197	4.988	4.793	4.611	4.439	4.278	4.127	3.985	3.851	3.725	3.190	2.779	2.456	2.196	1.985
13	12.134	11.348	10.635	9.986	9.394	8.853	8.358	7.904	7.487	7.103	6.750	6.424	6.122	5.842	5.583	5.342	5.118	4.910	4.715	4.533	4.362	4.203	4.053	3.912	3.780	3.223	2.799	2.469	2.204	1.990
14	13.004	12.106	11.296	10.563	9.899	9.295	8.745	8.244	7.786	7.367	6.982	6.628	6.302	6.002	5.724	5.468	5.229	5.008	4.802	4.611	4.432	4.265	4.108	3.962	3.824	3.249	2.814	2.478	2.210	1.993
15	13.865	12.849	11.938	11.118	10.380	9.712	9.108	8.559	8.061	7.606	7.191	6.811	6.462	6.142	5.847	5.575	5.324	5.092	4.876	4.675	4.489	4.315	4.153	4.001	3.859	3.268	2.825	2.484	2.214	1.995
16	14.718	13.578	12.561	11.652	10.838	10.106	9.447	8.851	8.313	7.824	7.379	6.974	6.604	6.265	5.954	5.668	5.405	5.162	4.938	4.730	4.536	4.357	4.189	4.033	3.887	3.283	2.834	2.489	2.216	1.997
17	15.562	14.292	13.166	12.166	11.274	10.477	9.763	9.122	8.544	8.022	7.549	7.120	6.729	6.373	6.047	5.749	5.475	5.222	4.990	4.775	4.576	4.391	4.219	4.059	3.910	3.295	2.840	2.492	2.218	1.998
18	16.398	14.992	13.754	12.659	11.690	10.828	10.059	9.372	8.756	8.201	7.702	7.250	6.840	6.467	6.128	5.818	5.534	5.273	5.033	4.812	4.608	4.419	4.243	4.080	3.928	3.304	2.844	2.494	2.219	1.999
19	17.226	15.678	14.324	13.134	12.085	11.158	10.336	9.604	8.950	8.365	7.839	7.366	6.938	6.550	6.198	5.877	5.584	5.316	5.070	4.843	4.635	4.442	4.263	4.097	3.942	3.311	2.848	2.496	2.220	1.999
20	18.046	16.351	14.877	13.590	12.462	11.470	10.594	9.818	9.129	8.514	7.963	7.469	7.025	6.623	6.259	5.929	5.628	5.353	5.101	4.870	4.657	4.460	4.279	4.110	3.954	3.316	2.850	2.497	2.221	1.999
21	18.857	17.011	15.415	14.029	12.821	11.764	10.836	10.017	9.292	8.649	8.075	7.562	7.102	6.687	6.312	5.973	5.665	5.384	5.127	4.891	4.675	4.476	4.292	4.121	3.963	3.320	2.852	2.498	2.221	2.000
22	19.660	17.658	15.937	14.451	13.163	12.042	11.061	10.201	9.442	8.772	8.176	7.645	7.170	6.743	6.359	6.011	5.696	5.410	5.149	4.909	4.690	4.488	4.302	4.130	3.970	3.323	2.853	2.498	2.222	2.000
23	20.456	18.292	16.444	14.857	13.489	12.303	11.272	10.371	9.580	8.883	8.266	7.718	7.230	6.792	6.399	6.044	5.723	5.432	5.167	4.925	4.703	4.499	4.311	4.137	3.976	3.325	2.854	2.499	2.222	2.000
24	21.243	18.914	16.936	15.247	13.799	12.550	11.469	10.529	9.707	8.985	8.348	7.784	7.283	6.835	6.434	6.073	5.746	5.451	5.182	4.937	4.713	4.507	4.318	4.143	3.981	3.327	2.855	2.499	2.222	2.000
25	22.023	19.523	17.413	15.622	14.094	12.783	11.654	10.675	9.823	9.077	8.422	7.843	7.330	6.873	6.464	6.097	5.766	5.467	5.195	4.948	4.721	4.514	4.323	4.147	3.985	3.329	2.856	2.499	2.222	2.000
30	25.808	22.396	19.600	17.292	15.372	13.765	12.409	11.258	10.274	9.427	8.694	8.055	7.496	7.003	6.566	6.177	5.829	5.517	5.235	4.979	4.746	4.534	4.339	4.160	3.995	3.332	2.857	2.500	2.222	2.000
35	29.409	24.999	21.487	18.665	16.374	14.498	12.948	11.655	10.567	9.644	8.855	8.176	7.586	7.070	6.617	6.215	5.858	5.539	5.251	4.992	4.756	4.541	4.345	4.164	3.998	3.333	2.857	2.500	2.222	2.000
40	32.835	27.355	23.115	19.793	17.159	15.046	13.332	11.925	10.757	9.779	8.951	8.244	7.634	7.105	6.642	6.233	5.871	5.548	5.258	4.997	4.760	4.544	4.347	4.166	3.999	3.333	2.857	2.500	2.222	2.000
45	36.095	29.490	24.519	20.720	17.774	15.456	13.606	12.108	10.881	9.863	9.008	8.283	7.661	7.123	6.654	6.242	5.877	5.552	5.261	4.999	4.761	4.545	4.347	4.166	4.000	3.333	2.857	2.500	2.222	2.000
50	39.196	31.424	25.730	21.482	18.256	15.762	13.801	12.233	10.962	9.915	9.042	8.304	7.675	7.133	6.661	6.246	5.880	5.554	5.262	4.999	4.762	4.545	4.348	4.167	4.000	3.333	2.857	2.500	2.222	2.000
60	44.955	34.761	27.676	22.623	18.929	16.161	14.039	12.377	11.048	9.967	9.074	8.324	7.687	7.140	6.665	6.249	5.882	5.555	5.263	5.000	4.762	4.545	4.348	4.167	4.000	3.333	2.857	2.500	2.222	2.000
70	50.169	37.499	29.123	23.395	19.343	16.385	14.160	12.443	11.084	9.987	9.085	8.330	7.691	7.142	6.666	6.250	5.882	5.556	5.263	5.000	4.762	4.545	4.348	4.167	4.000	3.333	2.857	2.500	2.222	2.000
80	54.888	39.745	30.201	23.915	19.596	16.509	14.222	12.474	11.100	9.995	9.089	8.332	7.692	7.143	6.667	6.250	5.882	5.556	5.263	5.000	4.762	4.545	4.348	4.167	4.000	3.333	2.857	2.500	2.222	2.000
90	59.161	41.587	31.002	24.267	19.752	16.579	14.253	12.488	11.106	9.998	9.090	8.333	7.692	7.143	6.667	6.250	5.882	5.556	5.263	5.000	4.762	4.545	4.348	4.167	4.000	3.333	2.857	2.500	2.222	2.000
100	63.029	43.098	31.599	24.505	19.848	16.618	14.269	12.494	11.109	9.999	9.091	8.333	7.692	7.143	6.667	6.250	5.882	5.556	5.263	5.000	4.762	4.545	4.348	4.167	4.000	3.333	2.857	2.500	2.222	2.000
120	69.701	45.355	32.373	24.774	19.943	16.651	14.281	12.499	11.111	10.000	9.091	8.333	7.692	7.143	6.667	6.250	5.882	5.556	5.263	5.000	4.762	4.545	4.348	4.167	4.000	3.333	2.857	2.500	2.222	2.000
140	75.168	46.874	32.802	24.897	19.978	16.662	14.285	12.500	11.111	10.000	9.091	8.333	7.692	7.143	6.667	6.250	5.882	5.556	5.263	5.000	4.762	4.545	4.348	4.167	4.000	3.333	2.857	2.500	2.222	2.000
150	77.520	47.436	32.938	24.930	19.987	16.664	14.285	12.500	11.111	10.000	9.091	8.333	7.692	7.143	6.667	6.250	5.882	5.556	5.263	5.000	4.762	4.545	4.348	4.167	4.000	3.333	2.857	2.500	2.222	2.000